

ОЧНЫЙ ОТБОРОЧНЫЙ ТУР. ЗАДАЧИ 7 класс.

РЕШЕБНИК

Время выполнения 180 минут

Всего за задачи 100 баллов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуется присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.

Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

Задача 1. Бизнес бабушки Риммы (20 баллов)

Бабушка Римма в сезон каждый день ходит в лес и собирает там белые грибы. Затем она их высушивает и продает на базаре у себя в деревне. В свежих грибах содержится 95% воды, а в высушенных всего 20%. В день бабушка собирает по 2 ведра грибов - каждое весом 3 кг. Сезон белых грибов длится ровно 2 недели.

Определите, какую выручку получит бабушка Римма, если продаст все высушенные грибы по цене 200 рублей за 100 гр.

Решение:

- 1) В 1 кг свежих грибов содержится $100\% - 95\% = 5\%$ сухой массы, что по весу составляет $1000 * 0,05 = 50$ гр. **(4 балла)**
- 2) В высушенных грибах сухая масса остается равной 50 гр., но теперь это соответствует 80% общего веса высушенных грибов. Значит, из 1 кг свежих грибов получается $(50 / (100 - 20)) * 100 = 62,5$ гр. высушенных. **(4 балла)**
- 3) В день бабушка собирает $2 * 3 = 6$ кг свежих грибов, что при высыхании превращается в $62,5 * 6 = 375$ гр. высушенных. **(4 балла)**
- 4) За 2 недели она получит $375 * 14 = 5250$ гр. высушенных грибов, пригодных для продажи. **(3 балла)**
- 5) От продажи всех высушенных грибов бабушка может выручить $5250 : 100 * 200 = 10\,500$ рублей. **(5 баллов)**

Ответ:

10500 рублей

Критерии:

За расчет, сколько высушенных грибов получается из сырых грибов - 15 баллов.

За расчет выручки бабушки - 5 баллов.

Задача 2. Рублевый или валютный вклад (20 баллов)

Банк «Ваш-Банк» принимает вклады от населения в рублях и в евро. По рублевым вкладам процентная ставка составляет 7%, а по валютным 2%. У вас есть некая сумма в рублях, которую вы хотите положить в этот банк.

Какой вклад вы выберете, если прогнозируется, что курс евро за год вырастет с 40 рублей до 42?

Решение:

Пусть у вас имеется X рублей.

Если положить их на рублевый вклад, то через год вы будете иметь $1,07 \cdot X$. **(5 баллов)**

В евро исходная сумма составляет $X/40$. **(5 баллов)**

Если эту сумму положить на валютный вклад, то через год вы получите

$1,02 \cdot (X/40) = 0,0255 \cdot X$ евро. **(5 баллов)**

Теперь, если перевести эту сумму из евро в рубли по новому курсу, то получится $0,0255X \cdot 42 = 1,071 \cdot X$ рублей.

$1,07 \cdot X < 1,071 \cdot X$ **(5 баллов)**

Следовательно, выгоднее выбрать валютный вклад, при условии, что прогноз по изменению валютного курса оправдается или курс евро вырастет в большей степени.

Ответ:

Валютный вклад выгоднее при условии исполнения прогноза.

Критерии:

За расчет суммы на рублевом вкладе через год - **5 баллов**.

За расчет суммы на валютном вкладе через год - **10 баллов**.

За сравнение сумм и вывод (в том числе **2 балла** за указание на то, что прогноз сбудется или указание на то, что курс евро может вырасти в большей степени) - **5 баллов**.

Задача 3. Цена продукции (20 баллов)

Предприятие производит один вид продукции и всю ее продает на рынке. Затраты предприятия на производство единицы этого вида продукции составляют 5 тугриков.

Прибыль предприятия после уплаты налога на прибыль составила 510 тыс. тугриков.

Определите цену единицы продукции данного предприятия, если известно, что выручка от продажи составила 1200 тыс. тугриков, а налог на прибыль равен 15%,
прибыль = выручка – затраты на производство.

Решение:

Если прибыль после уплаты налога оказалась равна 510 тыс. тугриков, то валовая прибыль (прибыль до уплаты налога) была равна $510 / (1 - 0,15) = 600$ тыс. тугриков. **(5 баллов)**

Прибыль = выручка – затраты на производство. Следовательно, затраты на производство составили $1200 - 600 = 600$ тыс. тугриков. **(5 баллов)** Тогда можно найти объем производства продукции: $600 \text{ тыс. тугриков} / 5 \text{ тугриков} = 120 \text{ тыс.}$ **(5 баллов)** единиц продукции. Теперь можно найти цену единицы продукции: цена продукции = выручка / объем производства = $1200 / 120 = 10$ тугриков. **(5 баллов)**

Ответ: Цена единицы продукции равна 10 тугриков.

Критерии:

- За расчет валовой прибыли - 5 баллов.
- За расчет затрат на производство - 5 баллов.
- За расчет объема производства - 5 баллов.
- За расчет цены - 5 баллов.

Задача 4. Ремонт автомобиля (20 баллов)

Андрей А. работает в компании AllStars программистом, и имеет автомобиль ToyotaRAV4 2009 года на котором ежедневно добирается на работу. После летних поездок автомобилю необходимо произвести замену передних амортизаторов. Андрей может выполнить работу самостоятельно за 10 часов рабочего времени и уже купил запчасти для замены. Друзья посоветовали обратиться к профессионалам, которые выполняют работу с запчастями заказчика. Андрей обзвонил несколько мастерских и узнал цену на ремонт.

В первой мастерской стоимость ремонта составит 3000 руб., а работу обещали выполнить за 2,5 часа, во второй мастерской -2800 руб. а время работы составило бы 3 часа.

Коллега посоветовал обратиться в третью автомастерскую, там за ремонт запросили 3200 руб., но выполнили бы ее за 1,5 часа. Андрей, не имеет возможность работать до окончания работ по ремонту автомобиля.

Какова альтернативная стоимость решения произвести ремонт автомобиля самостоятельно, если заработная плата Андрея в час 450 руб.

Решение:

Рассмотрим варианты ремонта автомобиля:

В первой мастерской: $3000 + (2,5 * 450) = 4125$ руб. **(4 балла)**

Во второй мастерской: $2800 + (3 * 450) = 4150$ руб. **(4 балла)**

В третьей мастерской: $3200 + (1,5 * 450) = 3875$ руб. **(4 балла)**

Соответственно: Из 3 вариантов, выгодна третья мастерская. Если Андрей самостоятельно ремонтирует автомобиль, то он не зарабатывает $10 * 450 = 4500$ руб., **(4 балла)** а значит альтернативные затраты его решения составляют $4500 - 3875 = 625$ руб. **(4 балла)**

Ответ: 625 руб.

Критерии:

- За расчет стоимости ремонта в каждой мастерской с учетом потраченного времени – 12 баллов
- За расчет незаработанного дохода, на время ремонта – 4 балла
- За расчет альтернативных затрат – 4 балла

Задача 5. Банк выдает кредиты (20 баллов)

Банк выделил 100 млн. рублей для выдачи кредитов трем фирмам сроком на один год. Фирма «Альфа» получила кредит в размере 20% от выделенной суммы под 30% годовых. Фирме «Бета» было выдано 40% от оставшейся суммы под 25% годовых. Остаток выделенной суммы получила фирма «Гамма». Через год, когда кредиты были погашены, оказалось, что банк получил прибыль в размере 16,4%. Рассчитайте, под какой процент годовых был выдан кредит фирме «Гамма».

Решение:

Фирме «Альфа» был выдан кредит в размере $100/100*20=20$ млн. руб. **(2 балла)**

Фирма «Бета» получила кредит в размере $(100-20)/100*40=32$ млн.руб. **(2 балла)**, а

фирме «Гамма» достался кредит в размере $100-20-32=48$ млн.руб. **(2 балла)**

Теперь посчитаем, какую прибыль получил банк, предоставляя кредиты фирмам. От фирмы «Альфа» банк получит $20/100*30=6$ млн.руб. **(3 балла)**, от фирмы «Бета» он получит $32/100*40=8$ млн.руб. **(3 балла)**, а от фирмы «Гамма» получит $48x$, где x - это процент, под который был выдан кредит фирме С (в долях) **(3 балла)**.

Суммарная прибыль равна $6+8+48x$ и она же равна $100/100*16,4=16,4$ млн. руб. Получаем уравнение $6+8+48x=16,4$ млн.руб, из которого находим, что $x=0,05$, что составляет 5%.

(5 баллов)

Ответ: 5%

Критерии:

За расчет суммы кредита, выданного каждой фирме – 6 баллов.

За расчет дохода, полученного от каждой фирмы – 9 баллов.

За составление уравнения для определения процента по кредиту для фирмы «Гамма» - 3 балла.

За решение уравнения и формулировка ответа в процентах – 2 балла.

ОЧНЫЙ ОТБОРОЧНЫЙ ТУР. ЗАДАЧИ РЕШЕБНИК

8 класс.

Время выполнения 180 минут

Всего за задачи 100 баллов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуются присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.

Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

Задача 1. Бизнес бабушки Риммы (20 баллов)

Бабушка Римма в сезон каждый день ходит в лес и собирает там белые грибы. Затем она их высушивает и продает на базаре у себя в деревне. В свежих грибах содержится 95% воды, а в высушенных всего 20%. В день бабушка собирает по 2 ведра грибов - каждое весом 3 кг. Сезон белых грибов длится ровно 2 недели.

Определите, какую выручку получит бабушка Римма, если продаст все высушенные грибы по цене 200 рублей за 100 гр.

Решение:

- 1) В 1 кг свежих грибов содержится $100\% - 95\% = 5\%$ сухой массы, что по весу составляет $1000 * 0,05 = 50$ гр. **(4 балла)**
- 2) В высушенных грибах сухая масса остается равной 50 гр., но теперь это соответствует 80% общего веса высушенных грибов. Значит, из 1 кг свежих грибов получается $(50 / (100 - 20)) * 100 = 62,5$ гр. высушенных. **(4 балла)**
- 3) В день бабушка собирает $2 * 3 = 6$ кг свежих грибов, что при высушивании превращается в $62,5 * 6 = 375$ гр. высушенных. **(4 балла)**
- 4) За 2 недели она получит $375 * 14 = 5250$ гр. высушенных грибов, пригодных для продажи. **(3 балла)**
- 5) От продажи всех высушенных грибов бабушка может выручить $5250 : 100 * 200 = 10\,500$ рублей. **(5 баллов)**

Ответ: 10500 рублей

Критерии:

За расчет, сколько высушенных грибов получается из сырых грибов - 15 баллов.

За расчет выручки бабушки - 5 баллов.

Задача 2. Коньки на зимних каникулах (20 баллов)

В зимнее время линия рыночного спроса на прокат коньков описывается функцией $Q_d = 1800 - 3P$, а линия рыночного предложения функцией $Q_s = 3P + 600$, где P – цена пары коньков в рублях, Q – количество коньков, пары.

Местные власти на период зимних каникул решили установить фиксированную цену на прокат коньков - на 50 руб. ниже равновесной.

- 1) Найдите равновесное значение P и Q на рынке проката коньков
- 2) Какую цену местные власти установили на прокат коньков в зимние каникулы?
- 3) Определите величину дефицита коньков на рынке в результате установления фиксированной цены.
- 4) Как изменилась выручка продавцов в результате действий местных властей?
- 5) Постройте графическую модель рынка коньков.

Решение:

1) Рассчитаем равновесную цену, приравняв функции спроса и предложения:

$$1800 - 3P = 3P + 600$$

$$6P = 1200$$

$$P = 200 \text{ руб. (равновесная цена) (2 балла)}$$

$$Q = 1200 \text{ (равновесное количество) (2 балла)}$$

2) Теперь определим значение фиксированной цены, установленной государством:

$$P_{\text{фикс}} = 200 - 50 = 150 \text{ руб. (2 балла)}$$

3) Рассчитаем величину предложения при фиксированной цене $(3 \cdot 150) + 600 = 1050$ пар. (2 балла)

Рассчитаем величину спроса при фиксированной цене $(1800 - 3 \cdot 150) = 1350$ пар. (2 балла)

Дефицит товара на рынке – это превышение величины спроса над величиной предложения и здесь он равен $1350 - 1050 = 300$ пар коньков (4 балла)

4) Выручка (TR) = цена (P) * количество (Q)

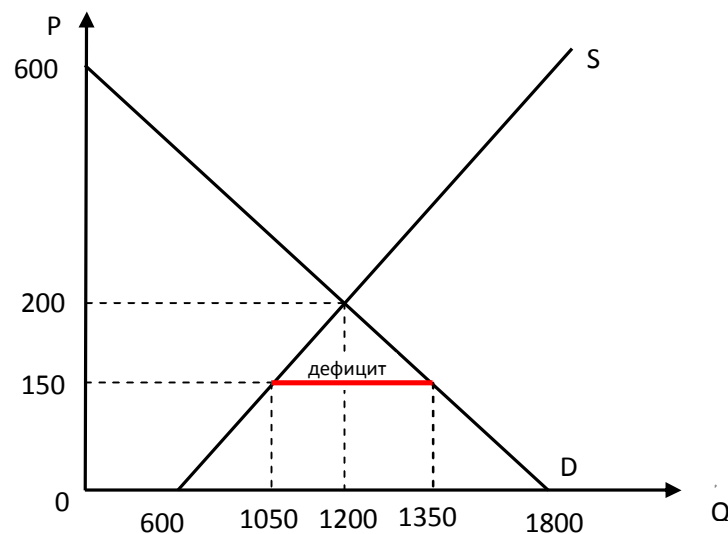
Выручка продавцов до введения фиксированной цены

$$TR_1 = 1200 \cdot 200 = 240000 \text{ руб. (1 балл)}$$

$$TR_2 = 1050 \cdot 150 = 157500 \text{ руб. (1 балл)}$$

$TR_1 - TR_2 = 240000 - 157500 = 82500$ руб. Выручка продавцов снизилась на 82500 руб.. (2 балла)

5) Построим графическую модель по данным задачи (2 балла)



Критерии:

За расчет равновесной цены и равновесного количества - 4 балла.

За расчет фиксированной цены - 2 балла.

За расчет величины предложения и величины спроса при фиксированной цене - 4 балла.

За определение величины дефицита товара на рынке- 4 балла

За расчет выручки продавцов по равновесной цене и по фиксированной цене – 4

За графическую модель спроса и предложения – 2 балла

Задача 3. Ягоды-Грибочки (20 баллов)

Семья Белочкиных: мама, папа и сестры Яна и Алёна любят собирать в лесу грибы и ягоды. За один день папа может собрать 60 шт. грибов или 3 банки ягоды, мама 55 шт. грибов либо 5 банок ягоды, Яна может собрать либо 42 шт. грибов, либо 3 банки ягоды, а Алёна может собрать либо 50 шт. грибов, либо 5 банок ягоды.

- 1) Какое максимальное количество ягод и грибов может собрать семья Белочкиных?
- 2) Все члены семьи предпочитают собирать грибы, а не ягоды, в какой очередности им следует приступить к сбору ягод?
- 3) Постройте общую КПВ семьи Белочкиных, изобразив по вертикальной оси количество собираемых грибов (в штуках), а по горизонтальной оси количество собираемых ягод (в банках).
- 4) Старейший член семьи Белочкиных, бабушка, строго настроена наказала привезти из леса не менее 12 банок ягоды. Какое максимальное количество грибов сможет собрать семья Белочкиных, выполнив при этом наказ бабушки?

Решение:

1) Для удобства представим данные в виде таблицы

Члены семьи	Количество собранных ягод и грибов		Альтернативная стоимость 1 банки ягоды (количество грибов в штуках)
	Ягоды (банки)	Грибочки (шт)	
Мама	5	55	11
Папа	3	60	20
Яна	3	42	14
Алёна	5	50	10
Итого:	16	207	

По данным таблицы видно,

1) Если вся семья будет собирать грибы, то максимально они соберут 207 шт. грибов;(1 балл)

Если вся семья будет собирать только ягоду, то максимально они соберут 16 банок;(1 балл)

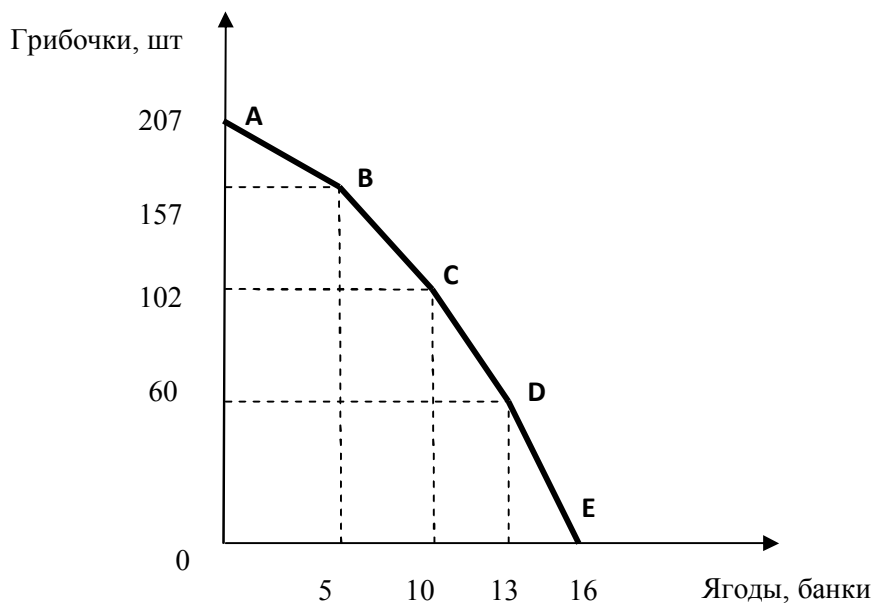
2) Наименьшее значение альтернативной стоимости сбора одной банки ягоды имеет Алёна. При решении собирать ягоду вместо грибов, именно она начнет собирать ягоды первой, затем к ней присоединится мама, затем Яна и, в конце концов, папа, т.к. он собирает ягоду с наибольшим значением альтернативной стоимости сбора ягод.

(за расчет альтернативной стоимости для каждого члена семьи и верный вывод по 2 балла, если решение отсутствует, но вывод верный 2 балла)

3) Построим КПВ семьи. Для этого составим таблицу.

	A	B	C	D	E
Грибочки, шт	207	157	102	60	0
Ягода, банки	0	5	10	13	16

Перенесем данные таблицы на график. (4 балла)



4) Для того, чтобы выполнить наказ Бабушки, мама и Алёна будут собирать ягоду все время и соберут 10 банок, 2 оставшихся банки будет собирать Яна, однако не все время, а только то, что требуется на сбор 2-х банок. В оставшееся время она могла бы собрать еще 1 банку ягоды или собрать 14 шт. грибочков т.к. альтернативная стоимость 1 банки ягоды для нее равна 14 шт. грибочков. По условию задачи требуется, чтобы семья собрала минимально 12 банок ягоды, значит, Яна соберет 14 грибочков, а Папа 60 грибочков. В оставшееся время, семейство соберет 74 грибочка.

(6 баллов за верный ответ, подкрепленный выводом и/или расчетом)

Ответ: Семья Белочкиных соберет 74 грибочка

Критерии:

За определение максимальных возможностей по сбору грибов и ягод – 2 балла

За определение альтернативной стоимости сбора 1 банки ягод для каждого члена семьи – 8 баллов.

За построение КПВ - 4 балла.

За расчет максимального количества грибочков – 6 баллов.

Задача 4. Модернизация производства (20 баллов)

Кот Матроскин наладил производство сметаны и стал производить 60 литров сметаны в день. Через год он модернизировал оборудование, и это позволило увеличить производство сметаны на 30 литров в день. Но в следующем году часть оборудования вышла из строя, и производство сметаны снизилось на 7%.

Определите изменение производительности труда за 2 года в хозяйстве Матроскина, если известно, что Матроскин один занимается производством сметаны.

Решение:

Пусть Q_1 – производство сметаны за день в первый год, Q_2 - производство сметаны за день во второй год, Q_3 - производство сметаны за день в третий год.

Тогда изменение производства сметаны составит за второй год

$Q_2/Q_1 = (60+30)/60 = 1,5$ (5 баллов), за третий год $Q_3/Q_2 = 0,93$. (5 баллов)

Значит, за два года изменение производства сметаны составит $Q_3/Q_1 = 1,5 * 0,93 = 1,395$, т.е. производство выросло на 39,5%. (5 баллов)

Так как количество работников не изменилось, то изменение производительности труда в точности равно изменению количества производимой продукции. **(5 баллов)**
Следовательно, за два года производительность труда в хозяйстве Матроскина выросла на 39,5%.

Ответ: 39,5%

Критерии:

За расчет изменения производства за второй год - 5 баллов.

За расчет изменения производства за третий год - 5 баллов.

За расчет изменения производства за два года - 5 баллов.

За объяснение того, что изменение производства в данном случае и есть показатель изменения производительности труда - 5 баллов.

Задача 5. Банк выдает кредиты (20 баллов)

Банк выделил некоторую сумму денег для выдачи кредитов трем фирмам сроком на один год. Фирма «Альфа» получила кредит в размере 20% от выделенной суммы под 30% годовых. Фирме «Бета» было выдано 40% от оставшейся суммы под 25% годовых. Остаток выделенной суммы получила фирма «Гамма». Через год, когда кредиты были погашены, оказалось, что банк получил прибыль в размере 16,4%. Рассчитайте, под какой процент годовых был выдан кредит фирме «Гамма».

Решение:

Пусть S - сумма, выделенная банком на кредиты фирмам «Альфа», «Бета» и «Гамма».

Тогда фирме «Альфа» был выдан кредит в размере $0,2S$. **(2 балла)** Фирма «Бета»

получила кредит в размере $(S - 0,2S) \cdot 0,4 = 0,32S$ **(2 балла)**, а фирме «Гамма» достался кредит в размере $S - 0,2S - 0,32S = 0,48S$. **(2 балла)**

Теперь посчитаем, какую прибыль получил банк, предоставляя кредиты фирмам. От фирмы «Альфа» банк получит $0,2S \cdot 0,3 = 0,06S$ **(3 балла)**, от фирмы «Бета» он получит $0,32S \cdot 0,25 = 0,08S$ **(3 балла)**, а от фирмы «Гамма» получит $0,48S\alpha$, где α - это процент, под который был выдан кредит фирме C (в долях). **(3 балла)**

Суммарная прибыль равна $0,14S + 0,48S\alpha$ и она же равна $0,164S$. **(3 балла)** Получаем уравнение, из которого находим, что $\alpha = 0,05$, что составляет 5%. **(2 балла)**

Ответ: 5%

Критерии:

За расчет суммы кредита, выданного каждой фирме – 6 баллов.

За расчет дохода, полученного от каждой фирмы – 9 баллов.

За составление уравнения для определения процента по кредиту для фирмы «Гамма» - 3 балла.

За решение уравнения и формулировка ответа в процентах – 2 балла.

ОЧНЫЙ ОТБОРОЧНЫЙ ТУР. ЗАДАЧИ 9 класс.

РЕШЕБНИК

Время выполнения 180 минут

Всего за задачи 100 баллов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуется присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.

Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

Задача 1. Бизнес бабушки Риммы (20 баллов)

Бабушка Римма в сезон каждый день ходит в лес и собирает там белые грибы. Затем она их высушивает и продает на базаре у себя в деревне. В свежих грибах содержится 95% воды, а в высушенных всего 20%. В день бабушка собирает по 2 ведра грибов - каждое весом 3 кг. Сезон белых грибов длится ровно 2 недели.

Определите, какую выручку получит бабушка Римма, если продаст все высушенные грибы по цене 200 рублей за 100 гр.

Решение:

- 1) В 1 кг свежих грибов содержится $100\% - 95\% = 5\%$ сухой массы, что по весу составляет $1000 * 0,05 = 50$ гр. **(4 балла)**
- 2) В высушенных грибах сухая масса остается равной 50 гр., но теперь это соответствует 80% общего веса высушенных грибов. Значит, из 1 кг свежих грибов получается $(50 / (100 - 20)) * 100 = 62,5$ гр. высушенных. **(4 балла)**
- 3) В день бабушка собирает $2 * 3 = 6$ кг свежих грибов, что при высушивании превращается в $62,5 * 6 = 375$ гр. высушенных. **(4 балла)**
- 4) За 2 недели она получит $375 * 14 = 5250$ гр. высушенных грибов, пригодных для продажи. **(3 балла)**
- 5) От продажи всех высушенных грибов бабушка может выручить $5250 : 100 * 200 = 10500$ рублей. **(5 баллов)**

Ответ: 10500 рублей

Критерии:

За расчет, сколько высушенных грибов получается из сырых грибов - 15 баллов.

За расчет выручки бабушки - 5 баллов.

Задача 2. Коньки на зимних каникулах (20 баллов)

В зимнее время линия рыночного спроса на прокат коньков описывается функцией $Q_d = 1800 - 3P$, а линия рыночного предложения функцией $Q_s = 3P + 600$, где P – цена пары коньков в рублях, Q – количество коньков, пары.

Местные власти на период зимних каникул решили установить фиксированную цену на прокат коньков - на 50 руб. ниже равновесной.

- 1) Найдите равновесное значение P и Q на рынке проката коньков
- 2) Какую цену местные власти установили на прокат коньков в зимние каникулы?
- 3) Определите величину дефицита коньков на рынке в результате установления фиксированной цены.
- 4) Как изменилась выручка продавцов в результате действий местных властей?
- 5) Постройте графическую модель рынка коньков.

Решение:

1) Рассчитаем равновесную цену, приравняв функции спроса и предложения:

$$1800 - 3P = 3P + 600, 6P = 1200, P = 200 \text{ руб. (равновесная цена) (2 балла)}$$

$$Q = 1200 \text{ (равновесное количество) (2 балла)}$$

2) Теперь определим значение фиксированной цены, установленной государством:

$$P_{\text{фикс}} = 200 - 50 = 150 \text{ руб. (2 балла)}$$

3) Рассчитаем величину предложения при фиксированной цене $(3 * 150) + 600 = 1050$ пар. (2 балла)

Рассчитаем величину спроса при фиксированной цене $(1800 - 3 * 150) = 1350$ пар. (2 балла)

Дефицит товара на рынке – это превышение величины спроса над величиной предложения и здесь он равен $1350 - 1050 = 300$ пар коньков (4 балла)

4) Выручка (TR) = цена (P) * количество (Q)

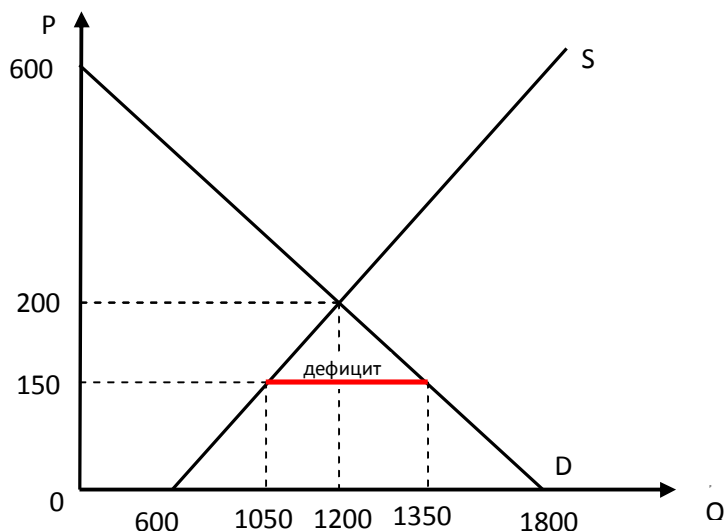
Выручка продавцов до введения фиксированной цены

$$TR_1 = 1200 * 200 = 240000 \text{ руб. (1 балл)}$$

$$TR_2 = 1050 * 150 = 157500 \text{ руб. (1 балл)}$$

$TR_1 - TR_2 = 240000 - 157500 = 82500$ руб. Выручка продавцов снизилась на 82500 руб.. (2 балла)

5) Построим графическую модель по данным задачи (2 балла)



Критерии:

За расчет равновесной цены и равновесного количества - 4 балла.

За расчет фиксированной цены - 2 балла.

За расчет величины предложения и величины спроса при фиксированной цене - 4 балла.

За определение величины дефицита товара на рынке - 4 балла

За расчет выручки продавцов по равновесной цене и по фиксированной цене – 4

За графическую модель спроса и предложения – 2 балла

Задача 3. Ягоды-Грибочки (20 баллов)

Семья Белочкиных: мама, папа и сестры Яна и Алёна любят собирать в лесу грибы и ягоды. За один день папа может собрать 60 шт. грибов или 3 банки ягоды, мама 55 шт. грибов либо 5 банок ягоды, Яна может собрать либо 42 шт. грибов, либо 3 банки ягоды, а Алёна может собрать либо 50 шт. грибов, либо 5 банок ягоды.

1) Постройте общую КПВ семьи Белочкиных, изобразив по вертикальной оси количество собираемых грибов (в штуках), а по горизонтальной оси количество собираемых ягод (в банках).

2) Старейший член семьи Белочкиных, бабушка, строго настроено наказала привезти из леса не менее 12 банок ягоды. Какое максимальное количество грибов сможет собрать семья Белочкиных, выполнив при этом наказ бабушки?

Решение:

1) Представим данные в виде таблицы

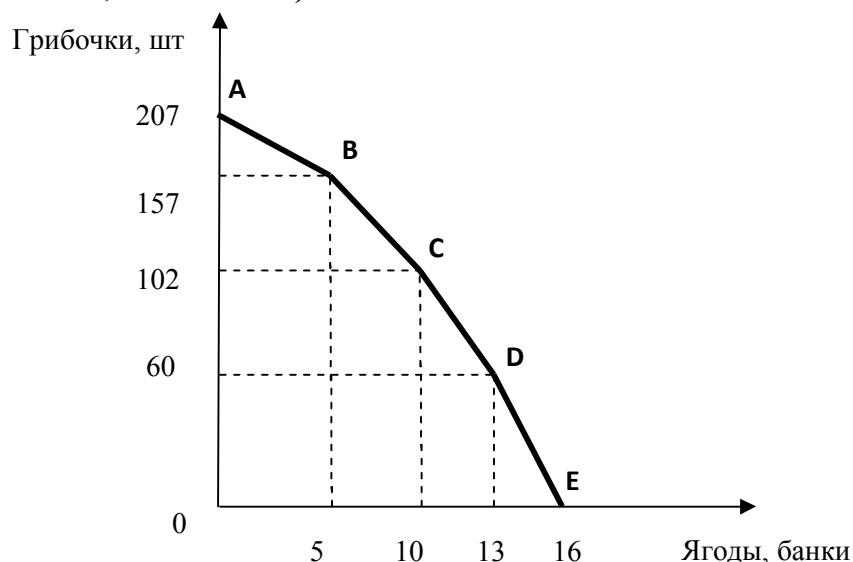
Члены семьи	Количество собранных ягод и грибов		Альтернативная стоимость 1 банки ягоды (количество грибов в штуках)
	Ягоды (банки)	Грибочки (шт)	
Мама	5	55	11
Папа	3	60	20
Яна	3	42	14
Алёна	5	50	10
Итого:	16	207	

По данным таблицы видно, что наименьшее значение альтернативной стоимости сбора одной банки ягоды имеет Алёна. При решении собирать ягоду вместо грибов, именно она начнет собирать ягоды первой, затем к ней присоединится мама, затем Яна и, в конце концов, папа, т.к. он собирает ягоду с наибольшим значением альтернативной стоимости сбора ягод. (за расчет альтернативной стоимости для каждого члена семьи и верный вывод по 2 балла)

Построим КПВ семьи. Для этого составим таблицу. (2 балла)

	A	B	C	D	E
Грибочки, шт	207	157	102	60	0
Ягода, банки	0	5	10	13	16

Перенесем данные таблицы на график. ((4 балла) Если отмечены только крайние точки, то 2 балла)



2) Для того, чтобы выполнить наказ Бабушки, мама и Алёна будут собирать ягоду все время и соберут 10 банок, 2 оставшихся банки будет собирать Яна, однако не все время, а только то, что требуется на сбор 2-х банок. В оставшееся время она могла бы собрать еще 1 банку ягоды или собрать 14 шт. грибочков т.к. альтернативная стоимость 1 банки ягоды для нее равна 14 шт. грибочков. По условию задачи требуется, чтобы семья собрала минимально 12 банок ягоды, значит, Яна соберет 14 грибочков, а Папа 60 грибочков. В оставшееся время, семейство соберет 74 грибочка.

Ответ: Семья Белочкиных соберет 74 грибочка

Критерии:

За определение альтернативной стоимости сбора 1 банки ягод для каждого члена семьи и вывод – 8 баллов.

За построение КПВ - 6 баллов.

За расчет максимального количества грибочков – 6 баллов.

Задача 4. Цена продукции (20 баллов)

Предприятие производит один вид продукции и всю ее продает на рынке. Затраты предприятия на производство единицы этого вида продукции составляют 5 тугриков. Прибыль предприятия после уплаты налога на прибыль составила 510 тыс. тугриков. Определите цену единицы продукции данного предприятия, если известно, что выручка от продажи составила 1200 тыс. тугриков, а ставка налога на прибыль была равна 15%.

Решение:

Если прибыль после уплаты налога оказалась равна 510 тыс. тугриков, то валовая прибыль (прибыль до уплаты налога) была равна $510/(1-0,15) = 600$ тыс. тугриков. **(5 баллов)**

Прибыль = выручка – затраты на производство. Следовательно, затраты на производство составили $1200 - 600 = 600$ тыс. тугриков. **(5 баллов)** Тогда можно найти объем производства продукции: $600 \text{ тыс. тугриков} / 5 \text{ тугриков} = 120 \text{ тыс.}$ **(5 баллов)** единиц продукции. Теперь можно найти цену единицы продукции: цена продукции = выручка / объем производства = $1200/120 = 10$ тугриков. **(5 баллов)**

Ответ: Цена единицы продукции равна 10 тугриков.

Критерии:

За расчет валовой прибыли - 5 баллов.

За расчет затрат на производство - 5 баллов.

За расчет объема производства - 5 баллов.

За расчет цены - 5 баллов.

Задача 5. Чебурашка и детский городок (20 баллов)

Чебурашка получил наследство, которое он с друзьями планировал потратить на покупку земли для строительства детского игрового городка. Однако старуха Шапокляк предложила ему положить деньги на год в банк под хороший процент, а землю купить через год. Чебурашка с радостью согласился, потому что тогда он смог бы купить земли на 8% больше. Однако через год выяснилось, что цена одного гектара

земли заметно выросла, и на все деньги теперь можно купить земли на 10% меньше, нежели в начале года.

Определите, как изменилась за год цена одного гектара земли (в процентах).

Решение:

Пусть A – сумма денег, которую Чебурашка положил в банк, P – цена гектара земли в начале года.

Если бы Чебурашка купил землю сразу, то он мог бы купить (A/P) гектаров земли.

Положив деньги в банк, Чебурашка намеревался через год купить $(A*1,08/P)$ гектаров земли. Но сможет купить всего $(A*1,08)/(P*x)$ гектаров земли, где x – показатель, характеризующий изменение цены гектара земли за год.

Значение x можно найти, решив уравнение $(1,08/x = 0,9)$.

Получаем, что $x=1,2$. Это значит, что цена гектара земли выросла в 1,2 раза или на 20%.

Ответ:Цена гектара земли выросла на 20%.

Критерии:

За составление уравнения для определения цены гектара земли - 12 баллов.

За решение уравнения и формулировку ответа в процентах – 8 баллов.

ОЧНЫЙ ОТБОРОЧНЫЙ ТУР. ЗАДАЧИ 10 класс.

РЕШЕБНИК

Время выполнения 180 минут

Всего за задачи 100 баллов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуются присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.

Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

Задача 1. Коэффициент Джини (20 баллов)

В городе Спрингфилде совокупный доход жителей распределяется следующим образом: 50% населения получают 20% всего дохода (это бедное население города), 30% населения получают 30% всего дохода (это средний класс) и 20% населения получают 50% всего дохода (это состоятельные люди города). Доходы внутри каждой из трех групп населения распределены равномерно.

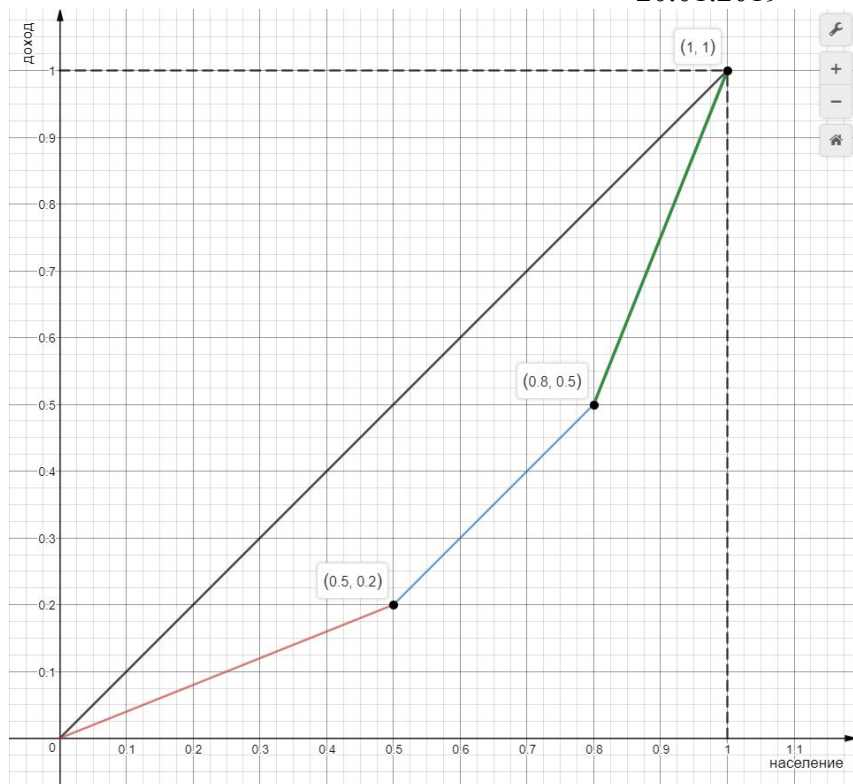
- 1) Чему равен коэффициент Джини в городе Спрингфилде?
- 2) Власти города ввели налог на состоятельных граждан города ($T\%$ от суммы полученного ими дохода), а все поступления от этого налога решили выплатить всем бедным гражданам города в виде равных по величине пособий. В результате доходы среди населения Спрингфилда оказались распределены абсолютно равномерно. Определите ставку налога на состоятельных граждан.

Решение

1. Нам необходимо вычислить площадь между кривой Лоренца и линией абсолютно равномерного распределения доходов, а затем поделить на площадь треугольника, образованного данной линией и осями.

$$G = \frac{0.5 - \frac{0.5 \cdot 0.2}{2} - \frac{0.7}{2} * 0.3 - \frac{1.5}{2} * 0.2}{0.5} = \frac{0.195}{0.5} = 0.39$$

Ответ: 0,39 (8 баллов)



2. Если доходы распределены абсолютно равномерно, значит, доля дохода каждой группы совпадает с долей этой группы в численности населения: бедные получают 50% совокупного дохода жителей города, средний класс по-прежнему 30%, а богатые – 20%.

Пусть ставка налога в долях единицы $t = T/100$. (3 балла)

До введения налога богатые получали $0,5 \cdot I$, где I – совокупный доход жителей города. Значит, уплаченный налог составит $t \cdot 0,5 \cdot I$, а доход состоятельных граждан после

налогообложения $(1 - t) \cdot 0,5 \cdot I$. (3 балла) Чтобы было достигнуто полное равенство, доля дохода состоятельных граждан в общем доходе горожан должна быть равна их доле в общей численности населения, то есть $(1 - t) \cdot 0,5 = 0,2 \Rightarrow t = 0,6$. (3 балла)

Или иначе: бедные до введения налога получали $0,2 \cdot I$, а после стали получать $0,2 \cdot I + t \cdot 0,5 \cdot I$. Доля их дохода в общем доходе жителей города должна быть равна доле их численности, то есть $0,2 + t \cdot 0,5 = 0,5 \Rightarrow t = 0,6$ (3 балла)

Ответ: ставка налога 60%

Критерии оценивания:

За расчет коэффициента Джини 8 баллов

За определение ставки налога 12 баллов

Задача 2. Ягоды-Грибочки (20 баллов)

Семья Белочкиных: мама, папа и сестры Яна и Алёна любят собирать в лесу грибы и ягоды. За один день папа может собрать 60 шт. грибов или 3 банки ягоды, мама 55 шт. грибов либо 5 банок ягоды, Яна может собрать либо 42 шт. грибов, либо 3 банки ягоды, а Алёна может собрать либо 50 шт. грибов, либо 5 банок ягоды.

1) Постройте общую КПВ семьи Белочкиных, изобразив по вертикальной оси количество собираемых грибов (в штуках), а по горизонтальной оси количество собираемых ягод (в банках).

2) Старейший член семьи Белочкиных, бабушка, строго настроила наказала привезти из леса не менее 12 банок ягоды. Какое максимальное количество грибов сможет собрать семья Белочкиных, выполнив при этом наказ бабушки?

Решение:

1) Представим данные в виде таблицы

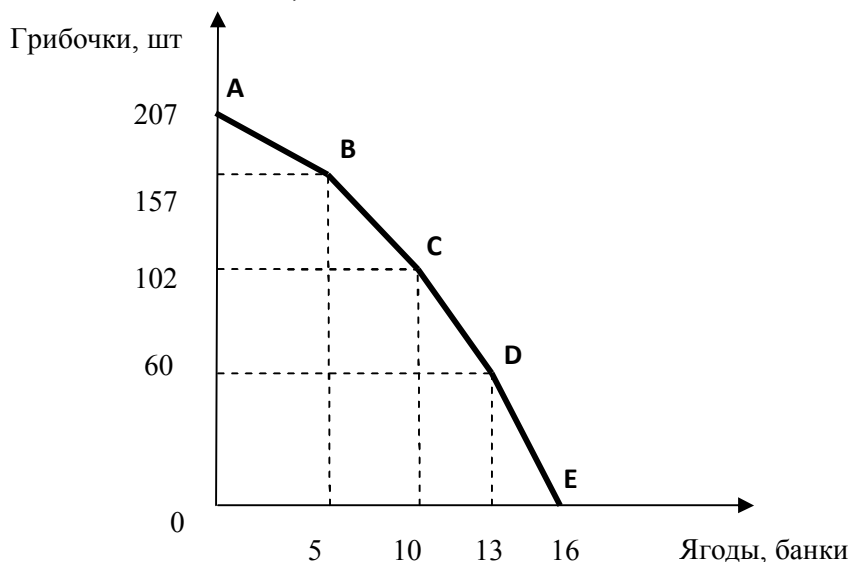
Члены семьи	Количество собранных ягод и грибов		Альтернативная стоимость 1 банки ягоды (количество грибов в штуках)
	Ягоды (банки)	Грибочки (шт)	
Мама	5	55	11
Папа	3	60	20
Яна	3	42	14
Алёна	5	50	10
Итого:	16	207	

По данным таблицы видно, что наименьшее значение альтернативной стоимости сбора одной банки ягоды имеет Алёна. При решении собирать ягоду вместо грибов, именно она начнет собирать ягоды первой, затем к ней присоединится мама, затем Яна и, в конце концов, папа, т.к. он собирает ягоду с наибольшим значением альтернативной стоимости сбора ягод. **(за расчет альтернативной стоимости для каждого члена семьи и верный вывод по 2 балла)**

Построим КПВ семьи. Для этого составим таблицу. **(2 балла)**

	A	B	C	D	E
Грибочки, шт	207	157	102	60	0
Ягода, банки	0	5	10	13	16

Перенесем данные таблицы на график. **((4 балла) Если отмечены только крайние точки, то 2 балла)**



2) Для того, чтобы выполнить наказ Бабушки, мама и Алёна будут собирать ягоду все время и соберут 10 банок, 2 оставшихся банки будет собирать Яна, однако не все время, а только то, что требуется на сбор 2-х банок. В оставшееся время она могла бы собрать еще 1 банку ягоды или собрать 14 шт. грибочков т.к. альтернативная стоимость 1 банки ягоды для нее равна 14 шт. грибочков. По условию задачи требуется, чтобы семья собрала минимально 12 банок ягоды, значит, Яна соберет 14 грибочков, а Папа 60 грибочков. В оставшееся время, семейство соберет 74 грибочка.

Ответ: Семья Белочкиных соберет 74 грибочка

Критерии:

За определение альтернативной стоимости сбора 1 банки ягод для каждого члена семьи и вывод – 8 баллов.

За построение КПВ - 6 баллов.

За расчет максимального количества грибочков – 6 баллов.

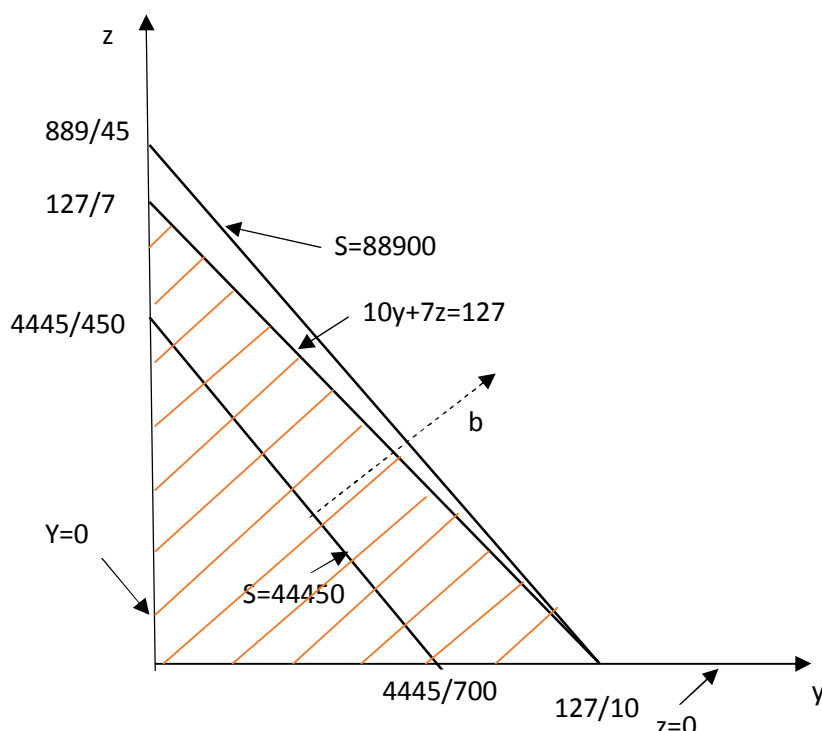
Задача 3. Отель в Простоквашино (20 баллов)

Учитывая нарастающий поток горожан, желающих совместить покупку продукции фермы с приятным отдыхом в Простоквашино, дядя Фёдор, пёс и кот решили открыть отель. Купили здание жилой площадью 889 м^2 . Запланировали стандартные номера площадью 21 м^2 , улучшенные номера площадью 28 м^2 и номера «люкс» площадью 49 м^2 . Изучение рынка показало, что стандартных номеров должно быть в 2 раза больше улучшенных, стандартный номер будет приносить 2000 рублей в сутки, улучшенный – 3000 рублей в сутки, номер «люкс» - 4500 рублей в сутки. Определите количество номеров каждого типа так, чтобы заработанная за сутки сумма денег была наибольшей. Какова эта сумма?

Решение

Обозначим:

X-количество стандартных номеров, Y-количество улучшенных номеров, Z-количество номеров «люкс», TR-заработанная за сутки сумма денег.



Тогда надо максимизировать функцию $TR=2000X + 3000Y + 4500Z$ при выполнении условий:

- (*) X, Y, Z – целые числа,
- (1) $X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0$,
- (2) $21X + 28Y + 49Z \leq 889$,
- (3) $X = 2Y$.

С учётом равенства (3) неравенство (2) принимает вид:
 $42Y + 28Y + 49Z \leq 889$ или $70Y + 49Z \leq 889$ или

$$10Y + 7Z \leq 127. [1]$$

1 вариант решения (графический):

Заштрихована область допустимых решений задачи, т.е. множество пар (Y, Z) , удовлетворяющих условиям (1), (2), (3).

Стрелкой b указано направление увеличения TR.

$TR_{\text{наиб}} = 88900$ при $Z=0, Y=127/10$, но не удовлетворяет условию (*).

Точка $(12; 1)$ – ближайшая к $(127/10; 0)$ точка области допустимых решений с целыми координатами.

Итак, $TR_{\text{наиб}} = 2000 \times 24 + 3000 \times 12 + 4500 \times 1 = 88500$ при $Z=1, Y=12, X=24$.

2 вариант решения:

$$TR=2000X + 3000Y + 4500Z \text{ с учетом равенства (3)}$$

$$TR=2*2000Y+3000Y + 4500Z =7000Y+4500Z \rightarrow \max \quad [2]$$

Выразим *в стандартном виде* функции: ограничение по площади здания и выручки.

$$Z=a-bY$$

$$7Z \leq 127-10Y$$

$$Z \leq 127/7 - (10/7)Y, \text{ где } 10/7 \approx 1,43 \quad [3]$$

$$Z = TR/4500 - (7000/4500)*Y, \quad Z = TR/4500 - (14/9)*Y \text{ где } 14/9 \approx 1,56 \quad [4]$$

1,43 и 1,56 коэффициенты при Y , показывающие тангенс угла наклона функции [3] и [4] к оси Y . Так как $1,43 < 1,56$, то у функции выручки угол наклона к оси Y больше \rightarrow при увеличении выручки \max её достигается при $\max Y$ (пересечет на границе положительных значений Z).

Из [3] $\max Y = 12,7$. Ближайшее целое $Y = 12$. Тогда $X = 24$.

Использованная при этом площадь: $21*24 + 12*28 = 504 + 336 = 840$.

Остаток $S = 889 - 840 = 49 \text{ (м}^2\text{)}$ – значит возможно выделить площадь под 1 «люкс».

$$\text{Из [2]} \quad TR = 7000*12 + 4500*1 = 88500$$

Ответ: наибольшая заработанная за сутки сумма составляет 88500 рублей при 24 стандартных номерах, 12 улучшенных номерах и одном номере «люкс».

Критерии:

За неравенство по площади – 5 баллов

За функцию выручки – 5 баллов

За определение количества стандартных и улучшенных номеров – 5 баллов

За определение количества номеров люкс – 2 балла

За нахождение максимума выручки – 3 балла

Задача 4. Коньки на зимних каникулах (20 баллов)

В зимнее время линия рыночного спроса на прокат коньков описывается функцией $Q_d = 1800 - 3P$, а линия рыночного предложения функцией $Q_s = 3P + 600$, где P – цена пары коньков в рублях, Q – количество коньков, пары.

Местные власти на период зимних каникул решили установить фиксированную цену на прокат коньков - на 50 руб. ниже равновесной.

- 1) Найдите равновесное значение P и Q на рынке проката коньков
- 2) Какую цену местные власти установили на прокат коньков в зимние каникулы?
- 3) Определите величину дефицита коньков на рынке в результате установления фиксированной цены.
- 4) Как изменилась выручка продавцов в результате действий местных властей?
- 5) Постройте графическую модель рынка коньков.

Решение:

1) Рассчитаем равновесную цену, приравняв функции спроса и предложения:

$$1800 - 3P = 3P + 600 \quad 6P = 1200; \quad P = 200 \text{ руб. (равновесная цена) (2 балла)}$$

$$Q = 1200 \text{ (равновесное количество) (2 балла)}$$

2) Теперь определим значение фиксированной цены, установленной государством:

$R_{\text{фикс}} = 200 - 50 = 150$ руб. **(2 балла)**

3) Рассчитаем величину предложения при фиксированной цене $(3 * 150) + 600 = 1050$ пар. **(2 балла)**

Рассчитаем величину спроса при фиксированной цене $(1800 - 3 * 150) = 1350$ пар. **(2 балла)**

Дефицит товара на рынке – это превышение величины спроса над величиной предложения и здесь он равен $1350 - 1050 = 300$ пар коньков **(4 балла)**

4) Выручка (TR) = цена (P) * количество (Q)

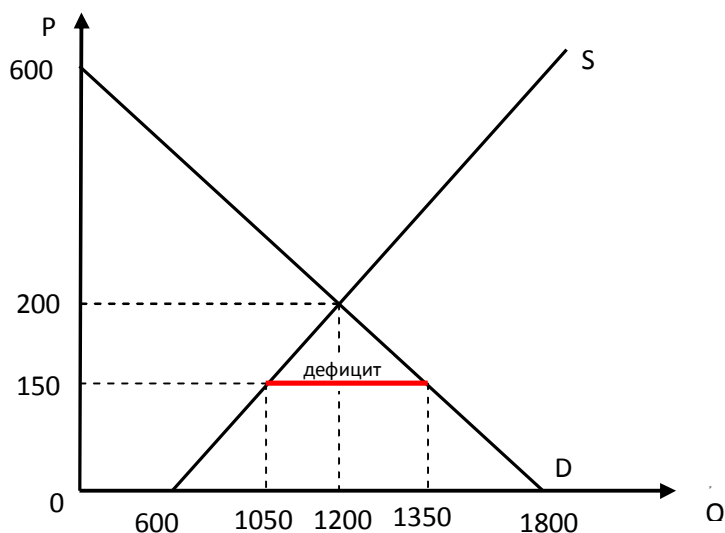
Выручка продавцов до введения фиксированной цены

$TR_1 = 1200 * 200 = 240000$ руб. **(1 балл)**

$TR_2 = 1050 * 150 = 157500$ руб. **(1 балл)**

$TR_1 - TR_2 = 240000 - 157500 = 82500$ руб. Выручка продавцов снизилась на 82500 руб. **(2 балла)**

5) Построим графическую модель по данным задачи **(2 балла)**



Критерии:

За расчет равновесной цены и равновесного количества - 4 балла.

За расчет фиксированной цены - 2 балла.

За расчет величины предложения и величины спроса при фиксированной цене - 4 балла.

За определение величины дефицита товара на рынке - 4 балла

За расчет выручки продавцов по равновесной цене и по фиксированной цене – 4

За графическую модель спроса и предложения – 2 балла

Задача 5. Квартира для внука (20 баллов)

До выхода на пенсию Кузьма Антонович решил подарить внуку на Новый год квартиру. На недостающую для покупки квартиры сумму в 1 млн. рублей он взял 15 декабря кредит в банке на 25 месяцев. Условия его возврата такие:

1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько сумма денег, выплаченная банку за весь срок кредитования, больше, чем сумма, взятая в кредит?

Решение:

Обозначим: x_k -сумма k -ой выплаты банку; $S_0=1000000$ - сумма, взятая в кредит; S_k - сумма долга банку после k -ой выплаты.

Тогда:

$$S_1=1,01S_0-x_1;$$

$$S_2=1,01S_1-x_2;$$

$$S_{25}=1,01S_{24}-x_{25};$$

Просуммируем почленно последние равенства:

$$(*) S_1+S_2+\dots+S_{25}=1,01(S_0+S_1+\dots+S_{24})-(x_1+x_2+\dots+x_{25}).$$

По пункту 3) условий возврата кредита $S_1-S_0=S_2-S_1=\dots=S_{25}-S_{24}=d$,

тогда $S_1+S_2+\dots+S_{25}=(S_1+S_{25})\times 25/2=(S_0+d+S_0+25d)\times 25/2=(S_0+13d)\times 25$;

$$S_0+S_1+\dots+S_{24}=(S_0+S_{24})\times 25/2=(S_0+S_0+24d)\times 25/2=(S_0+12d)\times 25.$$

Тогда равенство (*) принимает вид: $(S_0+13d)\times 25=1,01\times(S_0+12d)\times 25-(x_1+x_2+\dots+x_{25})$, откуда сумма выплат банку за весь срок кредитования составляет $x_1+x_2+\dots+x_{25}=1,01\times(S_0+12d)\times 25-(S_0+13d)\times 25=$
 $=25\times(1,01S_0+1,01\times 12d-S_0-13d)=25\times(0,01S_0+12,12d-13d)=25\times(0,01S_0-0,88d)$.

Т.к. кредит оформлен на 25 месяцев, то $S_{25}=S_0+25d=0$, откуда $d=-S_0/25$.

Получаем $x_1+x_2+\dots+x_{25}=25\times(0,01S_0+0,88S_0/25)=S_0\times(0,25+0,88)=1,13S_0$.

Искомая величина $(x_1+x_2+\dots+x_{25})-S_0=1,13S_0-S_0=0,13S_0=130000$.

ОТВЕТ: банку выплачено на 130000 рублей больше суммы, взятой в кредит.

Другой вариант решения:

1. Согласно пункту 3), долг уменьшается на одну и ту же величину в месяц. Значит, в каждый месяц из «тела» кредита возвращается $K/25$. Соответственно, за 25 месяцев банку вернут K .

2. Вторая часть выплат: 1-го числа j -го месяца - это 1% от оставшейся суммы долга на конец предыдущего месяца: $0,01 [K-(K/25) \cdot (j-1)]$;

Например, 1 числа второго месяца пользования кредита (первый платеж банку), нужно будет заплатить 1% от остатка долга на конец первого месяца. А в первом месяце ещё только взяли кредит и ничего не возвращали. Заплатят $0,01 K$. Первого числа 3-го месяца 1 % от $(K-K/25)$ и т.д.

За 25 месяцев заплатят процентов:

$$0,01*[K+(K-K/25)]+(K-2K/25)+\dots+(K-24K/25)=0,01K[1+(1-1/25)+(1-2/25)+\dots+(1-24/25)]=0,01K*[25-1/25*(1+2+3+\dots+24)]=0,01K(25-12)=0,13K.$$

3. Вывод: банку заплатят на $0,13 K$ больше взятого кредита, то есть $0,13*1000000\text{руб}=130000$ рублей.

Критерии:

За расчет суммы процентов за 25 месяцев - 15 баллов

За расчет того, на сколько сумма выплаченная банку за весь срок кредитования, больше, чем сумма, взятая в кредит – 5 баллов

ОЧНЫЙ ОТБОРОЧНЫЙ ТУР. ЗАДАЧИ 11 класс.

РЕШЕБНИК

Время выполнения 180 минут

Всего за задачи 100 баллов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуются присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.

Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

Задача 1. Коэффициент Джини (20 баллов)

В городе Спрингфилде совокупный доход жителей распределяется следующим образом: 50% населения получают 20% всего дохода (это бедное население города), 30% населения получают 30% всего дохода (это средний класс) и 20% населения получают 50% всего дохода (это состоятельные люди города). Доходы внутри каждой из трех групп населения распределены равномерно.

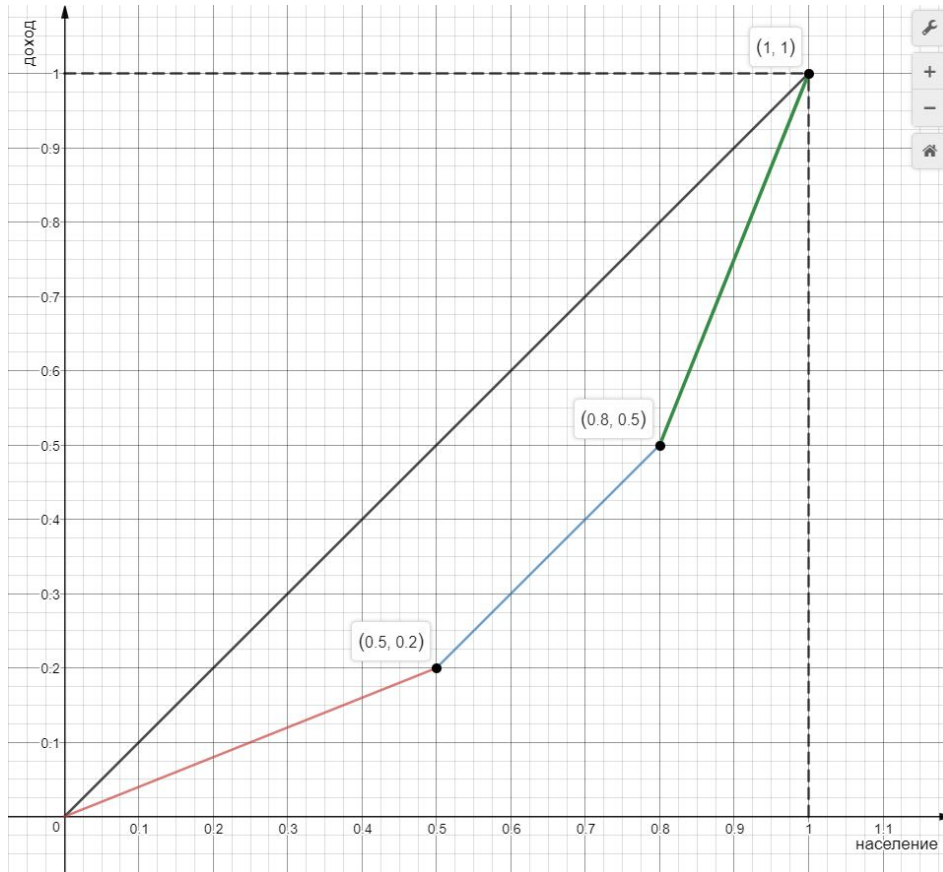
- 1) Чему равен коэффициент Джини в городе Спрингфилде?
- 2) Власти города ввели налог на состоятельных граждан города ($T\%$ от суммы полученного ими дохода), а все поступления от этого налога решили выплатить всем бедным гражданам города в виде равных по величине пособий. В результате доходы среди населения Спрингфилда оказались распределены абсолютно равномерно. Определите ставку налога на состоятельных граждан.

Решение

1. Нам необходимо вычислить площадь между кривой Лоренца и линией абсолютно равномерного распределения доходов, а затем поделить на площадь треугольника, образованного данной линией и осями.

$$G = \frac{0.5 - \frac{0.5 \cdot 0.2}{2} - \frac{0.7}{2} * 0.3 - \frac{1.5}{2} * 0.2}{0.5} = \frac{0.195}{0.5} = 0.39$$

Ответ: 0,39 (8 баллов)



2. Если доходы распределены абсолютно равномерно, значит, доля дохода каждой группы совпадает с долей этой группы в численности населения: бедные получают 50% совокупного дохода жителей города, средний класс по-прежнему 30%, а богатые – 20%.

Пусть ставка налога в долях единицы $t = T/100$. (3 балла)

До введения налога богатые получали $0,5 \cdot I$, где I – совокупный доход жителей города. Значит, уплаченный налог составит $t \cdot 0,5 \cdot I$, а доход состоятельных граждан после налогообложения $(1 - t) \cdot 0,5 \cdot I$. (3 балла) Чтобы было достигнуто полное равенство, доля дохода состоятельных граждан в общем доходе горожан должна быть равна их доле в общей численности населения, то есть $(1 - t) \cdot 0,5 = 0,2 \Rightarrow t = 0,6$. (3 балла)

Или иначе: бедные до введения налога получали $0,2 \cdot I$, а после стали получать $0,2 \cdot I + t \cdot 0,5 \cdot I$. Доля их дохода в общем доходе жителей города должна быть равна доле их численности, то есть $0,2 + t \cdot 0,5 = 0,5 \Rightarrow t = 0,6$ (3 балла)

Ответ: ставка налога 60%

Критерии оценивания:

За расчет коэффициента Джини 8 баллов

За определение ставки налога 12 баллов

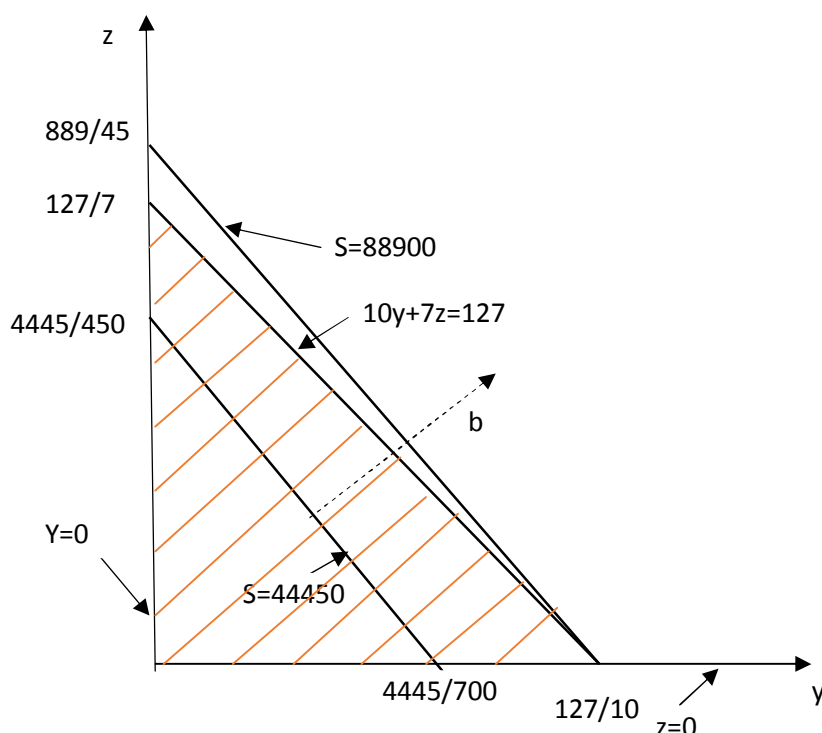
Задача 2. Отель в Простоквашино (20 баллов)

Учитывая нарастающий поток горожан, желающих совместить покупку продукции фермы с приятным отдыхом в Простоквашино, дядя Фёдор, пёс и кот решили открыть отель. Купили здание жилой площадью 889 м². Запланировали стандартные номера площадью 21 м², улучшенные номера площадью 28 м² и номера «люкс» площадью 49 м². Изучение рынка показало, что стандартных номеров должно быть в 2 раза больше улучшенных, стандартный номер будет приносить 2000 рублей в сутки, улучшенный – 3000 рублей в сутки, номер «люкс» - 4500 рублей в сутки. Определите количество номеров каждого типа так, чтобы заработанная за сутки сумма денег была наибольшей. Какова эта сумма?

Решение

Обозначим:

X-количество стандартных номеров, Y-количество улучшенных номеров, Z-количество номеров «люкс», TR-заработанная за сутки сумма денег.



Тогда надо максимизировать функцию $TR=2000X + 3000Y + 4500Z$ при выполнении условий:

- (*) X, Y, Z – целые числа,
- (1) $X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0$,
- (2) $21X + 28Y + 49Z \leq 889$,
- (3) $X = 2Y$.

С учётом равенства (3) неравенство (2) принимает вид:
 $42Y + 28Y + 49Z \leq 889$ или $70Y + 49Z \leq 889$ или

$$10Y + 7Z \leq 127. [1]$$

1 вариант решения (графический):

Заштрихована область допустимых решений задачи, т.е. множество пар (Y,Z), удовлетворяющих условиям (1), (2), (3).

Стрелкой b указано направление увеличения TR.

$TR_{\text{наиб}} = 88900$ при $Z=0, Y=127/10$, но не удовлетворяет условию (*).

Точка (12;1) – ближайшая к (127/10;0) точка области допустимых решений с целыми координатами.

Итак, $TR_{\text{наиб}} = 2000 \times 24 + 3000 \times 12 + 4500 \times 1 = 88500$ при $Z=1, Y=12, X=24$.

2 вариант решения:

$TR=2000X + 3000Y + 4500Z$ с учетом равенства (3)

$$TR=2 \cdot 2000Y + 3000Y + 4500Z = 7000Y + 4500Z \rightarrow \max [2]$$

Выразим в стандартном виде функции: ограничение по площади здания и выручки.

$$Z=a-bY$$

$$7Z \leq 127-10Y$$

$$Z \leq 127/7 - (10/7)Y, \text{ где } 10/7 \approx 1,43 \quad [3]$$

$$Z = TR/4500 - (7000/4500)*Y, \quad Z = TR/4500 - (14/9)*Y \text{ где } 14/9 \approx 1,56 \quad [4]$$

1,43 и 1,56 коэффициенты при y , показывающие тангенс угла наклона функции [3] и [4] к оси Y . Так как $1,43 < 1,56$, то у функции выручки угол наклона к оси Y больше \rightarrow при увеличении выручки \max её достигается при $\max Y$ (пересечет на границе положительных значений Z).

Из [3] $\max Y = 12,7$. Ближайшее целое $Y = 12$. Тогда $X = 24$.

Использованная при этом площадь: $21*24 + 12*28 = 504 + 336 = 840$.

Остаток $S = 889 - 840 = 49$ (м²) – значит возможно выделить площадь под 1 «люкс».

$$\text{Из [2] } TR = 7000*12 + 4500*1 = 88500$$

Ответ: наибольшая заработанная за сутки сумма составляет 88500 рублей при 24 стандартных номерах, 12 улучшенных номерах и одном номере «люкс».

Критерии:

За неравенство по площади – 5 баллов

За функцию выручки – 5 баллов

За определение количества стандартных и улучшенных номеров – 5 баллов

За определение количества номеров люкс – 2 балла

За нахождение максимума выручки – 3 балла

Задача 3. Квартира для внука (20 баллов)

До выхода на пенсию Кузьма Антонович решил подарить внуку на Новый год квартиру. На недостающую для покупки квартиры сумму в 1 млн. рублей он взял 15 декабря кредит в банке на 25 месяцев. Условия его возврата такие:

1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько сумма денег, выплаченная банку за весь срок кредитования, больше, чем сумма, взятая в кредит?

Решение:

Обозначим: x_k – сумма k -ой выплаты банку; $S_0 = 1000000$ – сумма, взятая в кредит; S_k – сумма долга банку после k -ой выплаты.

Тогда:

$$S_1 = 1,01S_0 - x_1; S_2 = 1,01S_1 - x_2; S_{25} = 1,01S_{24} - x_{25};$$

Просуммируем почленно последние равенства:

$$(*) \quad S_1 + S_2 + \dots + S_{25} = 1,01(S_0 + S_1 + \dots + S_{24}) - (x_1 + x_2 + \dots + x_{25}).$$

$$\text{Попункту 3) условий возврата кредита } S_1 - S_0 = S_2 - S_1 = \dots = S_{25} - S_{24} = d,$$

$$\text{тогда } S_1 + S_2 + \dots + S_{25} = (S_1 + S_{25}) \times 25/2 = (S_0 + d + S_0 + 25d) \times 25/2 = (S_0 + 13d) \times 25;$$

$$S_0 + S_1 + \dots + S_{24} = (S_0 + S_{24}) \times 25/2 = (S_0 + S_0 + 24d) \times 25/2 = (S_0 + 12d) \times 25.$$

Тогда равенство (*) принимает вид: $(S_0+13d) \times 25 = 1,01 \times (S_0+12d) \times 25 - (x_1+x_2+\dots+x_{25})$, откуда сумма выплат банку за весь срок кредитования составляет $x_1+x_2+\dots+x_{25} = 1,01 \times (S_0+12d) \times 25 - (S_0+13d) \times 25 = 25 \times (1,01S_0 + 1,01 \times 12d - S_0 - 13d) = 25 \times (0,01S_0 + 12,12d - 13d) = 25 \times (0,01S_0 - 0,88d)$.
Т.к. кредит оформлен на 25 месяцев, то $S_{25} = S_0 + 25d = 0$, откуда $d = -S_0/25$.
Получаем $x_1+x_2+\dots+x_{25} = 25 \times (0,01S_0 + 0,88S_0/25) = S_0 \times (0,25 + 0,88) = 1,13S_0$.
Искомая величина $(x_1+x_2+\dots+x_{25}) - S_0 = 1,13S_0 - S_0 = 0,13S_0 = 130000$.

ОТВЕТ: банку выплачено на 130000 рублей больше суммы, взятой в кредит.

Другой вариант решения:

1. Согласно пункту 3), долг уменьшается на одну и ту же величину в месяц. Значит, в каждый месяц из «тела» кредита возвращается $K/25$. Соответственно, за 25 месяцев банку вернут K .

2. Вторая часть выплат: 1-го числа j -го месяца - это 1% от оставшейся суммы долга на конец предыдущего месяца: $0,01 [K - (K/25) \cdot (j - 1)]$;

Например, 1 числа второго месяца пользования кредита (первый платеж банку), нужно будет заплатить 1% от остатка долга на конец первого месяца. А в первом месяце ещё только взяли кредит и ничего не возвращали. Заплатят $0,01 K$. Первого числа 3-го месяца 1 % от $(K - K/25)$ и т.д.

За 25 месяцев заплатят процентов:

$$0,01 * [K + (K - K/25)] + (K - 2K/25) + \dots + (K - 24K/25) = 0,01K [1 + (1 - 1/25) + (1 - 2/25) + \dots + (1 - 24/25)] = 0,01K * [25 - 1/25 * (1 + 2 + 3 + \dots + 24)] = 0,01K(25 - 12) = 0,13K.$$

3. Вывод: банку заплатят на $0,13 K$ больше взятого кредита, то есть $0,13 * 1000000 \text{ руб} = 130000$ рублей.

Критерии:

За расчет суммы процентов за 25 месяцев - 15 баллов

За расчет того, на сколько сумма выплаченная банку за весь срок кредитования, больше, чем сумма, взятая в кредит - 5 баллов

Задача 4. Монгольский кашемир (20 баллов)

Монгольская фирма AltanGobi по производству кашемира, является монополистом на российском рынке. Спрос на ее продукцию описывается функцией $Q = 60 - 0,5P$, а издержки фирмы $TC = 30 \cdot Q + 0,25 \cdot Q^2$ (P - цена, ден. ед., Q - количество, ед.). Как и на сколько денежных единиц изменится прибыль монополиста после введения потоварного налога в размере 50% от рыночной цены?

Решение:

Рассчитаем прибыль монополиста до введения налога.

$$P = 120 - 2Q \rightarrow TR_1 = 120Q - 2Q^2$$

$$Pr_1 = TR_1 - TC = 120Q - 2Q^2 - 30Q - 0,25Q^2 = -2,25Q^2 + 90Q$$

Это квадратичная функция, ее график - парабола, ветви которой направлены вниз, поэтому функция имеет единственный экстремум и этот экстремум является ее максимумом. Для его нахождения $Pr' = MR - MC = 0 \rightarrow MR = MC$

$$MC_1 = 30 + 0,5Q; MR_1 = 120 - 4Q; \text{ то есть } 30 + 0,5Q_1 = 120 - 4Q_1 \Rightarrow Q_1 = 20; P_1 = 80; TR_1 = 1600; TC_1 = 700; Pr_1 = 900$$

Прибыль монополиста после введения налога можно рассчитать разными способами. Общая сумма налоговых выплат составит $0,5 \cdot (120 - 2 \cdot Q) \cdot Q$. На эту сумму можно увеличить издержки монополиста, либо сократить его доход.

вариант 1: налог увеличивает совокупные издержки монополиста:

$$TC_2 = 30Q + 0,25Q^2 + 0,5(120 - 2Q)Q = 30Q + 0,25Q^2 + 60Q - Q^2 = 90Q - 0,75Q^2$$

Прибыль монополиста:

$$Pr_2 = TR_1 - TC_2 = 120Q - 2Q^2 - 90Q + 0,75Q^2 = -1,25Q^2 + 30Q$$

Это квадратичная функция, ее график – парабола, ветви которой направлены вниз, поэтому функция имеет единственный экстремум и этот экстремум является ее максимумом. Для его нахождения $Pr' = MR - MC = 0$ либо $MR = MC$

$MC_2 = -1,5Q + 90$, функция предельного дохода остается прежней.

$$MC_2 = MR_1, \text{ то есть } -1,5Q + 90 = 120 - 4Q \Rightarrow$$

$$Q_2 = 12; P_2 = 96; TR_2 = 1152; TC_2 = 972;$$

$$Pr_2 = 180$$

вариант 2 налог сокращает совокупный доход монополиста:

$$TR_2 = [(120 - 2 \cdot Q) \cdot Q] - [0,5 \cdot (120 - 2 \cdot Q) \cdot Q] = 60Q - Q^2$$

$$Pr_2 = TR_2 - TC_1 = 60Q - Q^2 - 30Q - 0,25Q^2 = -1,25Q^2 + 30Q$$

Это квадратичная функция, ее график – парабола, ветви которой направлены вниз, поэтому функция имеет единственный экстремум и этот экстремум является ее максимумом. Для его нахождения $Pr' = MR - MC = 0$ либо $MR = MC$

$$MR_2 = 60 - 2 \cdot Q$$

Функция предельных издержек остается прежней.

$$MC_1 = MR_2, \text{ то есть } 30 + 0,5Q_2 = 60 - 2 \cdot Q_2 \Rightarrow$$

$$Q_2 = 12; P_2 = 96; TR_2 = 572; TC_2 = 396;$$

$$Pr_2 = 180$$

Тогда изменение прибыли составит $(Pr_2 - Pr_1) = 180 - 900 = -720$

Ответ: прибыль снизится на 720 ден. ед. (-720)

Критерии оценивания:

Расчет прибыли монополиста до введения налога 8 баллов, в том числе определение оптимального объема производства 6 баллов, расчет величины прибыли 2 балла.

Расчет прибыли монополиста после введения налога любым способом 11 баллов, в том числе определение оптимального объема производства 8 баллов, величины прибыли 3 балла.

Расчет изменения прибыли 1 балл.

Если в решении отсутствует обоснование того, что экстремум функции прибыли является ее максимумом (любым способом), оценка снижается на 2 балла.

Задача 5. Что случится с ценами? (20 баллов)

Аналитики РБК изучили монетарную ситуацию в стране и составили прогноз на 2019 год. По прогнозам ведущего аналитика Артема Прыгунова скорость обращения

денег уменьшится на 20%, денежная масса увеличится на 35%. Аналитик Иван Бегунов прогнозирует рост объема производства на 25%. Как изменится уровень цен в экономике в соответствии с прогнозами аналитиков?

Решение:

Используя уравнение Фишера:

$$M_0 V_0 = P_0 Y_0$$

$$M_1 V_1 = P_1 Y_1$$

Следовательно,

$$\frac{M_1}{M_0} \cdot \frac{V_1}{V_0} = \frac{P_1}{P_0} \cdot \frac{Y_1}{Y_0}$$

По условию

$$1.35 \cdot 0.8 = \frac{P_1}{P_0} \cdot 1.25$$

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{1.35 \cdot 0.8}{1.25} = 0.864 \text{ новый уровень цен.}$$

Соответственно, изменение уровня цен составит -13,6%.

Ответ: уровень цен сократится на 13,6%.

Критерии оценивания:

За уравнение Фишера -5 баллов

За правильный расчет нового уровня цен -10 баллов

За расчет изменения - 5 баллов (если не указано направление изменения цены снять 2 балла)

Председатель оргкомитета,
заместитель министра



— И.В. Мануйлова