

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК.

7 класс.

Время выполнения 180 минут.

Всего за задачи 100 баллов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуется присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.

Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

Задача 1(20 баллов) «Дачная история»

Матрёна Семёновна купила дачу в СОО «Культура». Хорошая дача, возле реки, со всеми посадками, дом, баня, теплица. Только общество старое, дом и баня требуют ремонта, печь в бане прогорела, надо менять. Но как выбрать печь, чтобы она служила долго и верно? Матрёна Семёновна сходила в магазин «Печной мир», посоветовалась с соседом, внук поискал отзывы в Интернете.

Печи на рынке разные, есть дровяные и электрические, характеристика представлена в таблице.

Печь	Тип печи	Отапливаемый объём помещения, м ³	Масса печи, кг	Цена, рублей
Обь	дровяная	8-12	40	19000
Катунь	дровяная	10-16	48	23000
Бия	электрическая	7-12	14	16000
Огонёк	электрическая	9-15	15	14500

Дополнительная информация:

1. Ширина бани – 3,5метра, длина – 2метра, высота – 2,1 метра.
2. Для установки дровяной печи дополнительных затрат не требуется, внук на своей машине привезёт и сам установит. Установка электрической печи требует проведения специального кабеля, что обойдётся в 8000 рублей.
3. На дачный сезон для эксплуатации электрической печипотребуются 2400 киловатт часов электроэнергии по цене 4 рубля за киловатт час; для эксплуатации дровяной печи необходимо закупить 2м³ дров по цене 1600рублей за один кубический метр.

А) Опираясь на условие задачи, посоветуйте Матрёне Семёновне, какую печь стоит купить. (4 балла)

Б) Определите экономию при покупке наиболее подходящей печи. (4 балла)

В) Расходы на содержание и эксплуатацию какой печи в течение одного дачного сезона дешевле и насколько?(6 баллов)

Г) На сколько процентов покупка, установка и содержание одной печи в течение дачного сезона дороже другой? (ответ округлить до одного знака после запятой)(6 баллов)

Решение:

А) Объем бани = $3,5 \cdot 2 \cdot 2,1 = 14,7 \text{ м}^3$. По объему подходят дровяная печь «Катунь» и электрическая «Огонёк».(4 балла, 2 балла за расчет, 2 балла за вывод)

Б) Расходы на покупку и установку печи «Катунь» = 23000 рублей.

Расходы на покупку и установку печи «Огонёк» = $14500 + 8000 = 22500$ рублей.

Печь «Огонёк» обойдется на 500 рублей дешевле.(4 балла)

В) Расходы на содержание дровяной печи «Катунь» за сезон = $1600 \cdot 2 = 3200$ рублей. (2 балла)

Расходы на содержание электрической печи «Огонёк» за сезон = $2400 \cdot 4 = 9600$ рублей. (2 балла)

Содержание печи «Катунь» обойдется дешевле на 6400 рублей, или в 3 раза. (2 балла)

Г) Расходы на покупку, установку и содержание дровяной печи «Катунь» = $23000 + 3200 = 26200$ рублей. (1 балл)

Расходы на покупку, установку и содержание электрической печи «Огонёк» = $22500 + 9600 = 32100$ рублей. (1 балл)

Разница в расходах = $32100 - 26200 = 5900$ рублей.

Расходы на покупку, установку и содержание электрической печи «Огонёк» на 22,5% больше($5900 : 26200 \cdot 100 = 22,5\%$). (4 балла)

Ответ: А) дровяная печь «Катунь» и электрическая «Огонёк».

Б) 500 рублей.

В) Содержание печи «Катунь» обойдется дешевле на 6400 рублей, или в 3 раза.

Г) Расходы на покупку, установку и содержание электрической печи «Огонёк» на 22,5% больше.

Задача 2(20 баллов) «Гуси-лебеди» и производительность труда»

В результате снижения рыночного спроса на выпускаемую предприятием продукцию, компания «Гуси лебеди» вынуждена была сократить численность рабочих на 20%, что привело к снижению объема производства на 30%.

Определите, на сколько процентов изменилась выработка (производительность труда) в компания «Гуси лебеди».

Решение: Выработка (производительность труда) = $\frac{\text{Объем производства}}{\text{Численность рабочих}}$

Выработка до снижения спроса = Q_1/L_1

Выработка после снижения спроса = $0,7Q_1/0,8L_1 = 0,875(Q_1/L_1)$, то есть после изменений, выработка составила 87,5% от первоначальной.(15 баллов)

Таким образом, имеет место снижение выработки на 12,5% ($87,5 - 100$). (5 баллов)

Ответ: Снизилась на 12,5%.

Задача 3 (20 баллов) «Молочный коктейль для друзей»

Слава пригласил друзей в гости и хочет угостить их своим фирменным молочным коктейлем. Для приготовления коктейля, помимо молока и мороженого пломбир, необходимо взять банан и клубнику. 100 г банана стоит 10 рублей, а 100 г клубники – 80 рублей. Слава готов потратить не более 500 рублей на покупку фруктов. Для одного коктейля требуется 20 г банана и 40 г клубники.

Какое максимальное количество порций коктейля сможет сделать Слава?

Решение:

Рассчитаем затраты на покупку фруктов для одной порции коктейля.

100 г банана – 10 рублей

20 г банана – X рублей

Следовательно, для приготовления 1 порции коктейля необходимо затратить на покупку бананов 2 рубля. **(5 баллов)**

100 г клубники – 80 рублей

40 г клубники – X рублей

Следовательно, для приготовления 1 порции коктейля необходимо затратить на покупку клубники 32 рубля. **(5 баллов)**

Тогда, на приготовление одной порции коктейля требуется 34 рубля на покупку фруктов. **(2 балла)**

Всего можно приготовить: $500/34 = 14,7$ порций. **(3 балла)**

Так как количество порций может быть только целым числом, Слава приготовит 14 порций. **(5 баллов)**

Ответ: 14 порций.

Задача 4 (20 баллов) «Бизнес в стране Дураков»

Фирма Кота Базилио и Лисы Алисы «АВИБАС» изготавливает солнцезащитные очки. В рекламном ролике фирмы в мае появилась информация, что очки эффективно защищают от проникновения ультрафиолетовых лучей. В результате в мае продажи очков увеличились по сравнению с апрелем в 2 раза. Всего за два месяца работы, апрель и май, фирма продала 222 пары очков. Затраты на изготовление 1 пары составляют 50 сольдо.

А) Определите объем реализации солнцезащитных очков в апреле и мае. **(8 баллов)**

Б) Определите прибыль фирмы за два месяца работы, если в апреле цена очков превышала затраты на их изготовление на 30%. А в мае, в результате увеличения рыночного спроса, цена выросла на 20%. **(12 баллов)**

Решение:

А) Пусть объем реализации очков в апреле – X.

Составим уравнение: $X + 2X = 222$; $X = 74$ пары – объем реализации в апреле. **(6 баллов за составление и решение уравнения)**

В мае объем реализации составил: $74 \times 2 = 148$ пар. **(2 балла)**

Б) Прибыль в апреле = $74(50 \times 1,3 - 50) = 1110$ сольдо. **(4 балла)**

Цена очков в мае = $50 \times 1,3 \times 1,2 = 78$ сольдо. **(2 балла)**

Прибыль в мае = $148(78 - 50) = 4144$ сольдо. **(4 балла)**

Прибыль за два месяца, апрель-май = $1110 + 4144 = 5254$ сольдо. **(2 балла)**

Ответ: А) 74 пары; 148 пар.

Б) 5254 сольдо.

Задача 5 (20 баллов) «Подарки к Новому году»

В преддверии Нового года, при выборе и оформлении подарков, особым спросом у жителей города пользуются товары бытовой техники. Друзья Антон, Макар, Борис и Семён решили сделать покупки в торговом центре «Технодом». Антон купил планшет и лампу Глобус, заплатив 40000 рублей. Макар купил лампу Глобус и кофеварку, заплатив на 28000 рублей меньше Антона. Борис купил планшет, кофеварку и два телефона, заплатив на четверть больше Антона. Семён решил купить планшет и телефон.

А) Определите расходы Макара и Бориса на покупку подарков. **(5 баллов)**

Б) Определите стоимость покупки Семёна. **(15 баллов)**

Решение:

А) Определим расходы друзей на покупку подарков: **(5 баллов)**

Антон	Макар	Борис
40000 рублей	$40000 - 28000 = 12000$ рублей	$40000 \times 1,25 = 50000$ рублей

Б) Пусть П – цена планшета, Л – цена лампы Глобус, К – цена кофеварки, Т – цена телефона.

Теперь мы можем записать 3 уравнения:

$$П + Л = 40000$$

$$Л + К = 12000$$

$$П + К + 2Т = 50000$$

Если сложим левые и правые части этих уравнений, то получим:

$$П + Л + Л + К + П + К + 2Т = 102000$$

$$2П + 2Л + 2К + 2Т = 102000$$

$$П + Л + К + Т = 51000$$

Если известно, что $Л + К = 12000$, тогда $П + Т = 51000 - 12000 = 39000$ рублей
(запись соотношений и расчет стоимости покупки Семёна – 15 баллов).

Ответ: А) 12000 рублей; 50000 рублей.

Б) 3900 рублей.

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК.

8 класс.

Время выполнения 180 минут.

Всего за задачи 100 баллов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуются присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.

Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

Задача 1(20 баллов) «Яблочный бум»

На новой даче у Матрёны Семёновны растут замечательные яблоки. В этом году яблок уродилось много, можно продать свежие, а можно высушить. Сушилка есть у дочери, сушить же придётся самой, взяв сушилку на время. Свежие яблоки содержат 88% воды, а высушенные – 25%. Матрёна Семёновна собрала 80кг яблок.

А) Сколько высушенных яблок может получиться у Матрёны Семёновны?(12 баллов)

Б) Свежие яблоки можно продать самой на рынке по 200 рублей за пятилитровое ведёрко, в ведёрко входит 4 кг яблок. Сушёные можно сдать на рынке в киоск по 370 рублей за килограмм. Какая продажа будет выгоднее и насколько?(8 баллов)

Решение.

А) Расчеты удобно свести в таблицу. Важно помнить правило, что в продукте, при высушивании, количество воды может меняться, масса сухого вещества остаётся неизменной.

Яблоки	Масса, кг	Вода		Сухое вещество	
		кг	%	кг	%
Свежие	80	70,4	88	9,6	12
Высушенные	12,8	3,2	25	9,6	75

$100\% - 88\% = 12\%$ –% сухого вещества в свежих яблоках. (3 балла)

$80:100 \times 12 = 9,6$ кг –масса сухого вещества в свежих яблоках, которая так же остается неизменной в высушенных яблоках. (3 балла)

$100\% - 25\% = 75\%$ –% сухого вещества в высушенных яблоках.(3 балла)

$9,6 * 100 : 75 = 12,8$ кг – масса высушенных яблок.(3 балла)

Б)Количество ведерок яблок, которое можно продать на рынке = $80:4=20$ ведерок.(2 балла)

Выручка от продажи свежих яблок = $200 * 20 = 4000$ рублей.(2 балла)

Выручка от продажи высушенных яблок = $370 * 12,8 = 4736$ рублей. (2 балла)

Разница в доходе = $4736 - 4000 = 736$ рублей. (2 балла)

Ответ: А) 12,8 кг.

Б) Выгоднее продавать высушенные яблоки, выручка на 736 рублей больше.

Задача 2 (20 баллов) «Гуси-лебеди» и производительность труда»

В результате снижения рыночного спроса на выпускаемую предприятием продукцию, компания «Гуси лебеди» вынуждена была сократить численность рабочих на 20%, что привело к снижению объема производства на 30%.

Определите, на сколько процентов изменилась выработка (производительность труда) в компания «Гуси лебеди».

Решение: Выработка (производительность труда) = Объем производства/Численность рабочих

Выработка до снижения спроса = $Q1/L1$

Выработка после снижения спроса = $0,7Q1/0,8L1 = 0,875(Q1/L1)$, то есть после изменений, выработка составила 87,5% от первоначальной. **(15 баллов)**

Таким образом, имеет место снижение выработки на 12,5% ($87,5 - 100$). **(5 баллов)**

Ответ: Снизилась на 12,5%.

Задача 3 (20 баллов) «Подарки к Новому году»

В преддверии Нового года, при выборе и оформлении подарков, особым спросом у жителей города пользуются товары бытовой техники. Друзья Антон, Макар, Борис и Семён решили сделать покупки в торговом центре «Технодом». Антон купил планшет и лампу Глобус, заплатив 40000 рублей. Макар купил лампу Глобус и кофеварку, заплатив на 28000 рублей меньше Антона. Борис купил планшет, кофеварку и два телефона, заплатив на четверть больше Антона. Семён решил купить планшет и телефон.

А) Определите расходы Макара и Бориса на покупку подарков. **(5 баллов)**

Б) Определите стоимость покупки Семёна. **(15 баллов)**

Решение:

А) Определим расходы друзей на покупку подарков: **(5 баллов)**

Антон	Макар	Борис
40000 рублей	$40000 - 28000 = 12000$ рублей	$40000 \times 1,25 = 50000$ рублей

Б) Пусть П – цена планшета, Л – цена лампы Глобус, К – цена кофеварки, Т – цена телефона.

Теперь мы можем записать 3 уравнения:

$$П + Л = 40000$$

$$Л + К = 12000$$

$$П + К + 2Т = 50000$$

Если сложим левые и правые части этих уравнений, то получим:

$$П + Л + Л + К + П + К + 2Т = 102000$$

$$2П + 2Л + 2К + 2Т = 102000$$

$$П + Л + К + Т = 51000$$

Если известно, что $Л + К = 12000$, тогда $П + Т = 51000 - 12000 = 39000$ рублей **(запись соотношений и расчет стоимости покупки Семёна – 15 баллов).**

Ответ: А) 12000 рублей; 50000 рублей.

Б) 39000 рублей.

Задача 4 (20 баллов) «Новогодние сувениры фирмы «Дракоша»»

В преддверии новогодних праздников фирма «Дракоша» изготавливает новогодние сувениры из бука: брелоки для ключей и статуэтки. В декабре доход от продажи 1000 статуэток составил 550000 грошиков. Всего выручка фирмы равна 786250 грошиков. Затраты предприятия на производство одного брелока составляют 200 грошиков, а одной статуэтки – 250 грошиков.

А) Определите цену, по которой фирма предлагает на продажу брелоки, если известно, что прибыль после уплаты налога на прибыль составила 321000 грошиков, а ставка налога на прибыль – 20%. **(12 баллов)**

Б) Как изменится чистая прибыль фирмы «Дракоша» в январе, если для поддержания декабрьских объемов продаж планируется снизить цену брелоков на 10%, а цену статуэток на 20%? **(8 баллов)**

Решение:

А) Если прибыль после уплаты налога оказалась равна 321000 грошиков, то валовая прибыль (прибыль до уплаты налога) равна $321000 / (1 - 0,2) = 401250$ грошиков. **(4 балла)**

Прибыль до уплаты налога = Выручка – Затраты на производство.

Следовательно, общие затраты на производство составили $786250 - 401250 = 385000$ грошиков. **(3 балла)**

Затраты на производство брелоков = $385000 - 1000 \times 250 = 135000$ грошиков. **(2 балла)**

Объем производства брелоков = $135000 / 200 = 675$ брелоков. **(1 балл)**

Выручка от продажи брелоков = $786250 - 550000 = 236250$ грошиков. **(1 балл)**

Цена брелока = $236250 / 675 = 350$ рублей. **(1 балл)**

Б) Цена брелока в январе = $350 \times 0,9 = 315$ грошиков.

Цена статуэтки в январе = $550000 / 1000 \times 0,8 = 440$ грошиков. **(1 балл за расчет новых цен)**

Планируемый доход = $315 \times 675 + 440 \times 1000 = 212625 + 440000 = 652625$ грошиков.

Затраты на производство = 385000 грошиков, не изменились, т.к. объем производства и реализации остался без изменений.

Прибыль до уплаты налога = $652625 - 385000 = 267625$ грошиков.

Налог на прибыль = $267625 \times 20\% = 53525$ грошиков.

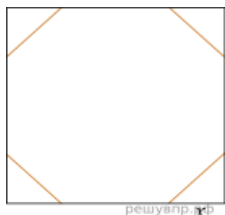
Чистая прибыль = $267625 - 53525 = 214100$ грошиков. **(3 балла за расчет чистой прибыли)**

Изменение прибыли = $214100 - 321000 = -106900$ грошиков, или $214100 / 321000 \times 100 - 100 = -33,3\%$, т.е. прибыль уменьшится на 106900 грошиков или на 33,3%. **(4 балла)**

Ответ: А) 350 рублей.

Б) Уменьшится на 106900 грошиков или на 33,3%.

Задача 5 (20 баллов) «Дизайнерское зеркало»



Мастеру по резке стекла и зеркал Ивану поступил заказ на изготовление дизайнерского зеркала. У него имеется квадратная заготовка с длиной стороны 40 см. Ему необходимо изготовить восьмиугольное зеркало, у которого все стороны и все углы равны.

Для этого, он планирует наметить линии и по этим линиям выполнить отрезки от квадрата (четыре прямоугольных треугольника по углам (см. рисунок)).

А) Помоги Ивану найти приближенно длину отреза в миллиметрах, считая, что $\sqrt{2}$ равен 1,41. (12 баллов)

Б) Какую сумму должен заплатить заказчик, если стоимость зеркального полотна за 1 м^2 составляет 18750 рублей. А стоимость работы Ивана алмазным диском 15 рублей за 1 см. (8 баллов)

Решение:

А) Пусть неизвестный катет равен x см. По теореме Пифагора, из соотношений сторон в прямоугольном треугольнике находим, что гипотенуза отрезанного треугольника равна $x\sqrt{2}$.

Поскольку все стороны восьмиугольника должны быть равны, получаем уравнение $40 - 2x = x\sqrt{2}$, откуда $x(2 - \sqrt{2}) = 40$, откуда

$$x = \frac{40}{2 + \sqrt{2}} = 20(2 - \sqrt{2}).$$

Подставляя значение 1,41 вместо $\sqrt{2}$ получаем:

$$x \approx 20 \cdot 0,59 = 11,8.$$

Итак, длина катета равна приблизительно 11,8 см, то есть 118 мм. (10 баллов)

Участник мог подставить приближённое значение $\sqrt{2} = 1,41$ в выражение $x = \frac{40}{2 + \sqrt{2}}$. В этом случае $x = 11,73020\dots$ и правильным ответом следует считать любое верное округление числа 117,302... мм.

Длина отреза в прямоугольном треугольнике – гипотенуза, следовательно, длина отреза = $11,8\sqrt{2} = 16,6 \text{ см} = 166 \text{ мм}$. (2 балла)

Б) Найдем стоимость выполнения заказа.

Стоимость зеркального полотна по размеру $40 \times 40 \text{ см} = 18750 \cdot (0,4 \cdot 0,4) = 3000$ рублей. (5 баллов)

Длина отрезков $4 \cdot 16,6 = 66,4 \text{ см}$. (1 балл)

Стоимость работы мастера алмазным диском = $15 \cdot 66,4 = 996$ рублей. (1 балл)

Общая стоимость услуг мастера = $3000 + 996 = 3996$ рублей. (1 балл)

Ответ: А) 166 мм.

Б) 3996 рублей.

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК

9 класс.

Время выполнения 180 минут.

Всего за задачи 100 баллов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуется присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.

Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

Задача 1(20 баллов) «Управление банковскими вкладами в стране Дураков»

1 апреля лиса Алиса и кот Базилио положили по 500 золотых на три года в банк «Карабас» под 10% годовых. Проценты по вкладу начисляются один раз в год и прибавляются к основной сумме вклада. Однако через год, опасаясь за сохранность своих сбережений, и Алиса и Базилио сняли со своих счетов соответственно 10% и 20% имеющихся денег. Еще через год каждый из них снял со своего счета соответственно 200 и 150 золотых.

У кого из компаньонов к концу третьего года на счету окажется большая сумма денег, и на сколько?

Решение:

Сведем проведенные операции и расчеты за три года в таблицу.

Дата, год	Наименование операции	Динамика роста (снижения) накоплений	
		лиса Алиса	кот Базилио
01.04	Принято от клиента	500	500
01.04, через 1 год	Начислено на остаток	$500 \times 1,1 = 550$ (1 балл)	$500 \times 1,1 = 550$ (1 балл)
01.04, через 1 год	Выдано клиенту, остаток на счете	$550 - 55 = 495$ (2 балла)	$550 - 110 = 440$ (2 балла)
01.04, через 2 года	Начислено на остаток	$495 \times 1,1 = 544,5$ (2 балла)	$440 \times 1,1 = 484$ (2 балла)
01.04, через 2 года	Выдано клиенту, остаток на счете	$544,5 - 200 = 344,5$ (2 балла)	$484 - 150 = 334$ (2 балла)
01.04, через 3 года	Начислено на остаток	$344,5 \times 1,1 = 378,95$ (2 балла)	$334 \times 1,1 = 367,4$ (2 балла)
Ответ на вопрос задачи		$378,95 - 367,4 = 11,55$ (2 балла)	

Ответ: У Алисы на 11,55 золотых больше.

Задача 2(20 баллов) «Яблочный бум»

На новой даче у Матрёны Семёновны растут замечательные яблоки. В этом году яблок уродилось много, можно продать свежие, а можно высушить. Сушилка есть у дочери, сушить же придётся самой, взяв сушилку на время. Свежие яблоки содержат 88% воды, а высушенные – 25%. Матрёна Семёновна собрала 80кг яблок.

А) Сколько высушенных яблок может получиться у Матрёны Семёновны?
(12 баллов)

Б) Свежие яблоки можно продать самой на рынке по 200 рублей за пятилитровое ведёрко, в ведёрко входит 4 кг яблок. Сушёные можно сдать на рынке в киоск по 370 рублей за килограмм. Какая продажа будет выгоднее и насколько?
(8 баллов)

Решение:

А) Расчеты удобно свести в таблицу. Важно помнить правило, что в продукте, при высушивании, количество воды может меняться, масса сухого вещества остаётся неизменной.

Яблоки	Масса, кг	Вода		Сухое вещество	
		кг	%	кг	%
Свежие	80	70,4	88	9,6	12
Высушенные	12,8	3,2	25	9,6	75

$100\% - 88\% = 12\%$ –% сухого вещества в свежих яблоках. **(3 балла)**

$80 : 100 \times 12 = 9,6 \text{ кг}$ –масса сухого вещества в свежих яблоках, которая так же остается неизменной в высушенных яблоках. **(3 балла)**

$100\% - 25\% = 75\%$ –% сухого вещества в высушенных яблоках. **(3 балла)**

$9,6 * 100 : 75 = 12,8 \text{ кг}$ – масса высушенных яблок. **(3 балла)**

Б) Количество ведерок яблок, которое можно продать на рынке = $80 : 4 = 20$ ведерок. **(2 балла)**

Выручка от продажи свежих яблок = $200 * 20 = 4000$ рублей. **(2 балла)**

Выручка от продажи высушенных яблок = $370 * 12,8 = 4736$ рублей. **(2 балла)**

Разница в доходе = $4736 - 4000 = 736$ рублей. **(2 балла)**

Ответ: А) 12,8 кг; Б) Выгоднее продавать высушенные яблоки, выручка на 736 рублей больше.

Задача 3 (20 баллов) «Николай начинает бизнес»

Резчик по дереву и бересте Николай хочет арендовать рабочее место в мастерской по изготовлению предметов народного промысла. В мастерской «Дубрава» стоимость аренды места с инструментом составляет 26 000 рублей в месяц, плюс 10% от выручки. На расходные материалы Николай в среднем тратит 500 рублей на одно изделие. А средняя стоимость одного изделия составляет 2000 рублей.

А) При каком минимальном количестве изделий в месяц Николай сможет заработать (выручка превысит расходы)? **(12 баллов)**

Б) Напишите функции и постройте графики постоянных, переменных, совокупных расходов, выручки. Определите точку безубыточности (доходы равны расходам). **(8 баллов)**

Решение:

А) **1 вариант.** Пусть x - количество изделий, при котором доходы Николая равны расходам.

Тогда доходы Николая составят $2000x$ рублей, а расходы $26000 + 2000x * 10\% + 500x$.

Приравняем доходы расходам: $2000x = 26000 + 200x + 500x$.

Отсюда $1300x = 26000$, $x = 20$ изделий. **(10 баллов)**

2 вариант. Объем безубыточного производства можно также рассчитать по формуле: $TБ = \text{Постоянные расходы} / (\text{Цена} - \text{Переменные затраты на единицу})$

Переменные затраты на единицу изделия = $500 + 2000 \times 10\% = 700$ рублей.

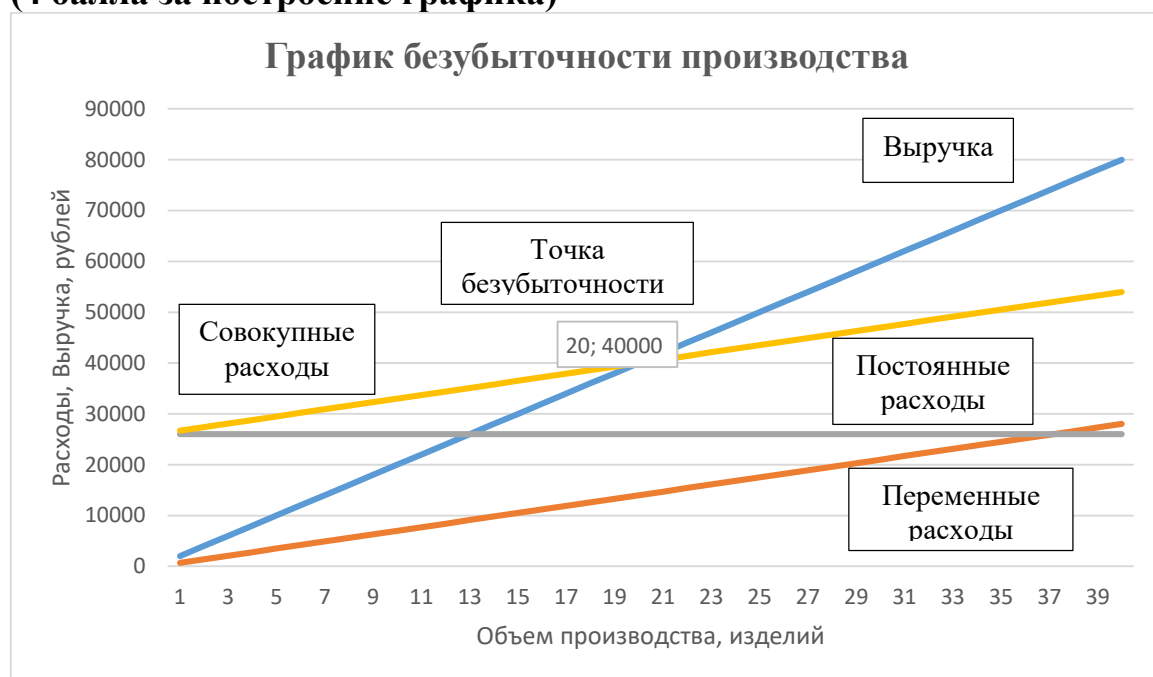
$TБ = 26000 / (2000 - 700) = 20$ изделий.

Николай должен продать больше 20 изделий в месяц, чтобы получить прибыль. Наименьшее целое число изделий - 21 изделие. **(2 балла)**

Б) Для построения графиков постоянных, переменных, совокупных расходов и выручки запишем соответствующие функции:

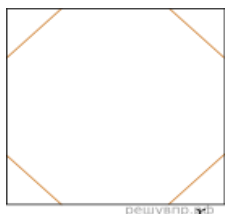
- функция постоянных расходов: $FC = 26000$ (1 балл)
- функция переменных расходов: $VC = 700Q$ (1 балл)
- функция совокупных расходов: $TC = 26000 + 700Q$ (1 балл)
- функция выручки: $TR = 2000Q$ (1 балл)

(4 балла за построение графика)



Ответ: А) 21 изделие; Б) Определение функций, построение графика.

Задача 4 (20 баллов) «Дизайнерское зеркало»



Мастеру по резке стекла и зеркал Ивану поступил заказ на изготовление дизайнерского зеркала. У него имеется квадратная заготовка с длиной стороны 40 см. Ему необходимо изготовить восьмиугольное зеркало, у которого все стороны и все углы равны.

Для этого, он планирует наметить линии и по этим линиям выполнить отрезки от квадрата (четыре прямоугольных треугольника по углам (см. рисунок)).

А) Помогите Ивану найти приближенно длину отрезка в миллиметрах, считая, что $\sqrt{2}$ равен 1,41. **(12 баллов)**

Б) Какую сумму должен заплатить заказчик, если стоимость зеркального полотна за 1 м^2 составляет 18750 рублей. А стоимость работы Ивана алмазным диском 15 рублей за 1 см. **(8 баллов)**

Решение:

А) Пусть неизвестный катет равен x см. По теореме Пифагора, из соотношений сторон в прямоугольном треугольнике находим, что гипотенуза отрезанного треугольника равна $x\sqrt{2}$.

Поскольку все стороны восьмиугольника должны быть равны, получаем уравнение $40 - 2x = x\sqrt{2}$, откуда $x(2 - \sqrt{2}) = 40$, откуда,

$$x = \frac{40}{2 + \sqrt{2}} = 20(2 - \sqrt{2}).$$

Подставляя значение 1,41 вместо $\sqrt{2}$ получаем: $x \approx 20 \cdot 0,59 = 11,8$.

Итак, длина катета равна приблизительно 11,8 см, то есть 118 мм. **(10 баллов)**

Участник мог подставить приближённое значение $\sqrt{2} = 1,41$ в выражение $x = \frac{40}{2 + \sqrt{2}}$. В этом случае $x = 11,73020\dots$ и правильным ответом следует считать любое верное округление числа 117,302... мм.

Длина отреза в прямоугольном треугольнике – гипотенуза, следовательно, длина отреза = $11,8\sqrt{2} = 16,6$ см = 166 мм. **(2 балла)**

Б) Найдем стоимость выполнения заказа.

Стоимость зеркального полотна по размеру 40×40 см = $18750 \cdot (0,4 \cdot 0,4) = 3000$ рублей. **(5 баллов)**

Длина отрезков $4 \cdot 16,6 = 66,4$ см. **(1 балл)**

Стоимость работы мастера алмазным диском = $15 \cdot 66,4 = 996$ рублей. **(1 балл)**

Общая стоимость услуг мастера = $3000 + 996 = 3996$ рублей. **(1 балл)**

Ответ: А) 166 мм; Б) 3996 рублей.

Задача 5(20 баллов) «Ужин на Старый Новый год»

На Старый Новый год семья Петровых из трех человек, традиционно все вместе лепят пельмени и манты. Если семья слепит 30 манта, то получится слепить 220 пельменей, причем 100 из них слепит Папа, который не умеет лепить манты вовсе, а остальные пельмени слепит Мама. Если же семья слепит 280 пельменей, то получится слепить всего 10 манта, которые будут слеплены Дочкой (две приведённые точки находятся на разных участках КПВ семьи). Максимальное количество манта, которое может слепить семья составляет 60 шт., при этом Дочка только учится семейной традиции поэтому работает неторопливо и аккуратно, а альтернативная стоимость одного манта для нее составляет 2 пельменя.

А) Постройте общую КПВ семьи Петровых (манты по оси y). **(12 баллов)**

Б) Традиционное горячее блюдо в этот вечер манты, остальные полуфабрикаты семья замораживает впрок. Папа вместе с Мамой съедают 12 манта, при этом Мама съедает на 2 манта меньше Папы, а Дочка на 3 манта меньше Мама. Какое максимальное количество пельменей сможет заморозить семья, после приготовления ужина на Старый Новый год? **(8 баллов)**

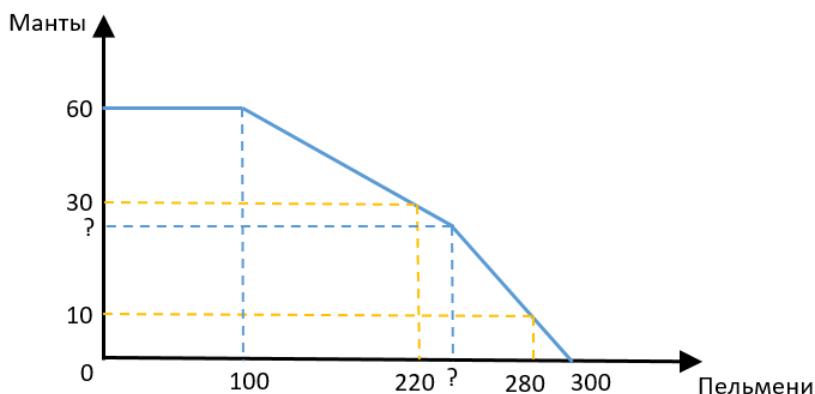
Решение:

А) КПВ семьи из трех человек состоит из трех линейных функций, на графике будет 2 крайних точки и 2 точки перегиба. Известно, что Папа не умеет лепить манты, а, следовательно, будет заниматься лепкой только пельменей. При этом максимальное количество манта, которое производит семья составит 60 шт., что является крайней точкой на КПВ по оси y .

Первый участок КПВ принадлежит Папе, это будет отрезок, параллельный оси x с первой точкой перегиба, соответствующей максимальному количеству пельменей, которые может слепить Папа (100 пельменей).

Определим вторую крайнюю точку. Известно, что если семья будет лепить 280 пельменей, то 10 мант будет лепить Дочка, у которой $AC \ 1M=2П$, следовательно, отказавшись от производства 10 мант, она сможет слепить еще $10 \cdot 2=20$ пельменей, тогда максимальное число пельменей составит $280+20=300$ шт., что является второй крайней точкой на КПВ.

Отметим известные нам данные. **(3 балла за рассуждения, определение крайних точек КПВ и первой точки перегиба)**



Найдем вторую точку перегиба общей КПВ. Для этого определим уравнения КПВ Мамы (2 отрезок общей КПВ) и Дочки (3 отрезок общей КПВ).

По известным точкам участка КПВ Мамы (100; 60) и (220; 30), составим и решим систему:

$$\begin{cases} 60 = 100a + b \\ 30 = 220a + b \end{cases}$$

Тогда уравнение КПВ Мамы имеет вид: $M = 85 - 0,25П$. **(3 балла)**

По известным точкам участка КПВ Дочки (280; 10) и (300; 0), составим и решим систему:

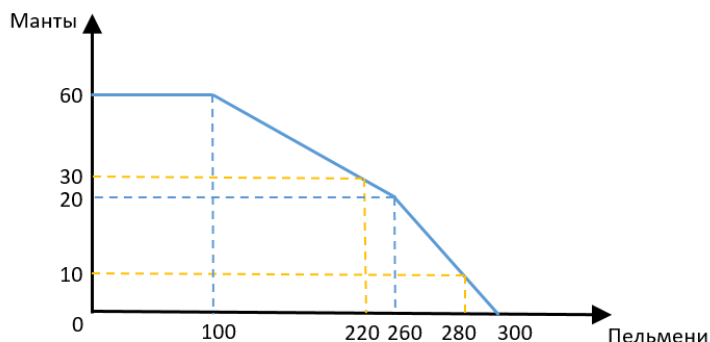
$$\begin{cases} 10 = 280a + b \\ 0 = 300a + b \end{cases}$$

Тогда уравнение КПВ Дочки имеет вид: $M = 150 - 0,5П$. **(3 балла)**

Вторую точку перегиба найдем, приравняв записанные уравнения.

$$85 - 0,25П = 150 - 0,5П$$

$П=260$; $M=20$. Отметим недостающие данные на графике КПВ. **(3 балла)**



Б) Составим уравнения и найдем количество приготовленных мант.
 Пусть x - съедает Папа, а y - съедает мама, тогда

$$\begin{cases} X + Y = 12 \\ X - Y = 2 \end{cases}$$

$X=7, Y=5$.

По условию дочка съедает $5 - 3=2$ шт.

Соответственно необходимо сварить $7 + 5+2 =14$ мант.

(4 балла за составление и решение системы, нахождение общего количества приготовленных мант).

Данное количество, принадлежит участку КПВ дочери, соответственно именно она слепит 14 мант, а затем присоединится к родителям в лепке пельменей и сможет слепить $(20-14)*2=12$ пельменей. **(2 балла)**

Тогда общее количество пельменей, которое заморозит семья составит $260+12=272$ шт. **(2 балла)**

**Ответ: А) Определение крайних точек, точек перегиба, построение КПВ.
Б) 272 шт.**

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК.

10 класс.

Время выполнения 180 минут.

Всего за задачи 100 баллов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуется присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.

Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

Задача 1 (20 баллов) «Круассаны с начинкой»

Оксана, окончив кулинарный техникум и изучив спрос на кондитерские изделия в своем городе, решила открыть небольшое производство круассанов с шоколадной и ягодной начинкой, чтобы поставлять их в кофейни города. Она провела необходимые расчеты по каждому виду продукта и внесла данные в таблицу, представленную ниже.

Вид начинки	Себестоимость 1 кг, рублей	Отпускная цена 1 кг, рублей	Производственные возможности в месяц, кг
Ягодная	700	1000	900
Шоколадная	1000	1350	750

Кофейни готовы покупать любое количество круассанов, но для разнообразия ассортимента каждого вида круассанов должно быть представлено к продаже не менее 150 кг.

Определите оптимальный объем производства каждого вида круассанов и максимально возможную прибыль, которую может получить начинающий предприниматель Оксана.

Решение:

Пусть x - доля мощностей, занятых на производство круассанов с ягодной начинкой, а y - доля мощностей, занятых под производство круассанов с шоколадной начинкой. Тогда $x + y = 1$, при этом круассанов с ягодной начинкой производится $900x$ кг, а с шоколадной начинкой - $750y$ кг.

Из условия ассортиментности следует, что $900x \geq 150$, откуда $x \geq 1/6$, а $750y \geq 150$ откуда $y \geq 1/5$.

Прибыль с продажи 1 кг круассанов с ягодной начинкой равна $1000 - 700 = 300$ рублей, а прибыль с продажи 1 кг круассанов с шоколадной начинкой равна $1350 - 1000 = 350$ рублей.

Общая прибыль с произведенной за месяц продукции составит $S(x,y) = 300 \cdot 900x + 350 \cdot 750y = 270000x + 262500y = 750 \cdot (360x + 350y)$

Таким образом, нам необходимо найти наибольшее значение функции $S(x,y) = 750 \cdot (360x + 350y)$ при выполнении следующих условий

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x \geq \frac{1}{6}, y \geq \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Подставляя $y = 1 - x$ в выражение $360x + 350y$, получаем: $y = 360x + 350(1 - x) = 10x + 350$, функция возрастающая.

Наибольшее значение выражения $S(x,y) = 750 \cdot (10x + 350)$ при условии $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}$ достигается при $x = \frac{4}{5}$, тогда $y = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$. **(16 баллов за составление функции прибыли, ее ограничений и обоснование ответа)**

При этом Оксана производит 720 кг круассанов с ягодной начинкой ($900 \cdot 4/5$) и 150 кг круассанов с шоколадной начинкой ($750 \cdot 1/5$). **(2 балла)**

Максимально возможная прибыль Оксаны за месяц равна: $750 \cdot (360 \cdot 4/5 + 350 \cdot 1/5) = 268500$ рублей. **(2 балла)**

Второй вариант решения

Прибыль с продажи 1 кг круассанов с ягодной начинкой равна $1000 - 700 = 300$ рублей, а прибыль с продажи 1 кг круассанов с шоколадной начинкой равна $1350 - 1000 = 350$ рублей. **(4 балла)**

При этом $900/750 = 1,2$. Это означает, что альтернативная стоимость 1 кг круассанов с шоколадной начинкой равна 1,2 кг круассанов с ягодной начинкой. **(4 балла)**

Заметим, что $1 \cdot 350$ рублей $< 1,2 \cdot 300$ рублей; $350 < 360$. Поэтому более выгодно производить круассаны с ягодной начинкой. Значит, круассанов с шоколадной начинкой необходимо производить 150 кг, а круассанов с ягодной начинкой $900 - 150 \cdot 1,2 = 720$ кг. **(8 баллов)**

Тогда максимально возможная прибыль за месяц: $150 \cdot 350 + 720 \cdot 300 = 268500$ рублей. **(4 балла)**

Ответ: 150 кг – с шоколадной начинкой, 720 кг – с ягодной начинкой; 268 500 рублей.

Задача 2(20 баллов) «Королевские налоги»

Производство волшебных палочек является стратегически важным для экономики страны Волшебная. Покупатели волшебных палочек - все промышленные предприятия страны, использующие волшебные палочки в качестве основного капитала. Спрос на волшебные палочки описывается

функцией: $Q_d = 500 - 4P$, а предложение: $Q_s = 100 + 6P$. Правительство страны, в целях пополнения государственной казны, планирует ввести налог в размере 5 эконо на производителей волшебных палочек на каждую проданную единицу товара.

Король Эконом I пригласил к себе Министра с портфелем и задал ему несколько вопросов:

А) Как изменится рыночная ситуация в случае введения налога, как изменится доход производителей волшебных палочек после уплаты налога? **(8 баллов)**

Б) Какую сумму налога соберет налоговая служба страны Волшебная? **(2 балла)**

В) Чему будет равно налоговое бремя покупателей и продавцов волшебных палочек? Постройте графическую модель. **(6 баллов)**

Г) Чему будут равны чистые потери общества в стране Волшебная? **(4 балла)**

Решение:

А) Найдем параметры рыночного равновесия до введения налогов.

$$500 - 4P = 100 + 6P$$

$P_e = 40$ эконо; $Q_e = 340$ штук; Доход производителей (TR) = $40 \cdot 340 = 13600$ эконо **(2 балла)**

При введении налога на продавцов изменится функция предложения, а функция спроса останется неизменной, в таком случае:

$$Q_{s2} = 100 + 6P \text{ продавца, где } P \text{ продавца} = P \text{ покупателя} - t$$

$$Q_{s2} = 100 + 6(P \text{ покупателя} - t)$$

$$Q_{s2} = 100 + 6(P \text{ покупателя} - 5)$$

$$Q_{s2} = 70 + 6P \text{ покупателя}$$

Новое равновесное значение:

$$500 - 4P = 70 + 6P$$

$$P_{e2} \text{ покупателя} = 43 \text{ эконо; } Q_{e2} = 328 \text{ штук. (3 балла)}$$

$$P \text{ продавца} = 43 - 5 = 38 \text{ эконо.}$$

$$\text{Доход производителей (TR)} = 38 \cdot 328 = 12464 \text{ эконо.}$$

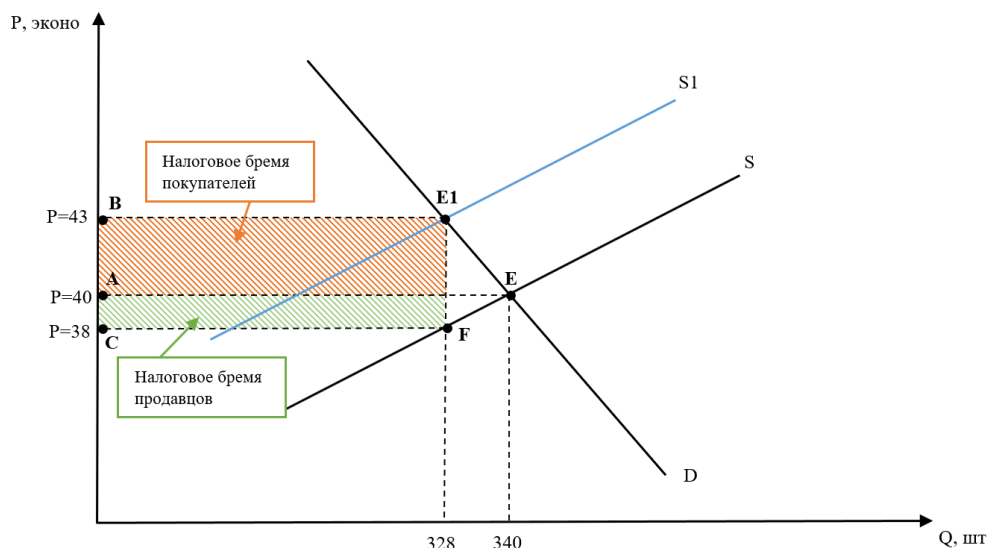
Равновесная цена выросла на 3 эконо (43 – 40). Равновесный объем снизился на 12 штук (328 - 340), доход производителей снизился на 1136 эконо (12464 – 13600). **(3 балла)**

Б) При величине налога в 5 эконо, переложенного на продавцов, величина налоговых поступлений в казну составит: $T = 328 \cdot 5 = 1640$ эконо. Эта сумма соответствует площади прямоугольника BE_1FC . **(2 балла)**

В) Мы можем говорить о переложении налогового бремени на покупателей, так как за каждую единицу товара они теперь платят не 40 эконо, как платили до введения налога, а 43 эконо, т.е. на 3 эконо больше. Эти 3 эконо являются налогом, заплаченным покупателями при покупке волшебных палочек. Всего же покупатели заплатят: $3 \cdot 328 = 984$ эконо – налоговое бремя покупателей. **(2 балла)**

Остальную сумму налога заплатят продавцы: $1640 - 984 = 656$ эконо – налоговое бремя продавцов. **(2 балла)**

Построение графика – 2 балла.



) После введения налога предложение волшебных палочек уменьшилось. Теперь покупатели за каждую единицу товара вынуждены заплатить больше, кроме того, все вместе покупатели волшебных палочек сокращают объем потребления, а это значит, что выигрыш покупателей снижается. Определим величину уменьшения выигрыша потребителя, что соответствует на графике площади трапеции BE_1EA .

Потери выигрыша потребителя: $(328 + 340)/2 * 3 = 1002$ эконо. (1 балл)

Продавцы после введения налога тоже несут потери. Они получают за каждую проданную единицу товара меньше, чем до введения налога, и, кроме того, сокращается объем продаж. Эти потери выигрыша производителя на графике соответствуют площади трапеции $AEFC$.

Потери выигрыша производителя: $(328 + 340)/2 * 2 = 668$ эконо. (1 балл)

Определим чистые общественные потери, т.е. разницу между общей суммой потерь выигрышей потребителей и производителей и суммой налоговых поступлений: $1002 + 668 - 1640 = 30$ эконо. (2 балла)

Чистые потери общества на графике соответствуют так же площади треугольника E_1EF .

Чистые потери общества = $1/2 * 5 * (340 - 328) = 30$ эконо.

Участник может предложить другой вариант нахождения чистых потерь общества, присуждаем 4 балла.

Ответ: А) Равновесная цена выросла на 3 эконо, равновесный объем снизился на 12 штук, доход производителей снизился на 1136 эконо.

Б) 1640 эконо.

В) 984 эконо – налоговое бремя покупателей; 656 эконо – налоговое бремя продавцов. Построение графической модели.

Г) 30 эконо.

Задача 3(20 баллов) «Ужин на Старый Новый год»

На Старый Новый год семья Петровых из трех человек, традиционно все вместе лепят пельмени и манты. Если семья слепит 30 мант, то получится слепить 220 пельменей, причем 100 из них слепит Папа, который не умеет лепить манты вовсе, а остальные пельмени слепит Мама. Если же семья слепит 280 пельменей, то получится слепить всего 10 мант, которые будут слеплены Дочкой (две

приведённые точки находятся на разных участках КПВ семьи). Максимальное количество мант, которое может слепить семья составляет 60 шт., при этом Дочка только учится семейной традиции поэтому работает неторопливо и аккуратно, а альтернативная стоимость одного манта для нее составляет 2 пельменя.

А) Постройте общую КПВ семьи Петровых (манты по оси у). **(12 баллов)**

Б) Традиционное горячее блюдо в этот вечер манты, остальные полуфабрикаты семья замораживает впрок. Папа вместе с Мамой съедают 12 мант, при этом Мама съедает на 2 манта меньше Папы, а Дочка на 3 манта меньше Мамы. Какое максимальное количество пельменей сможет заморозить семья, после приготовления ужина на Старый Новый год? **(8 баллов)**

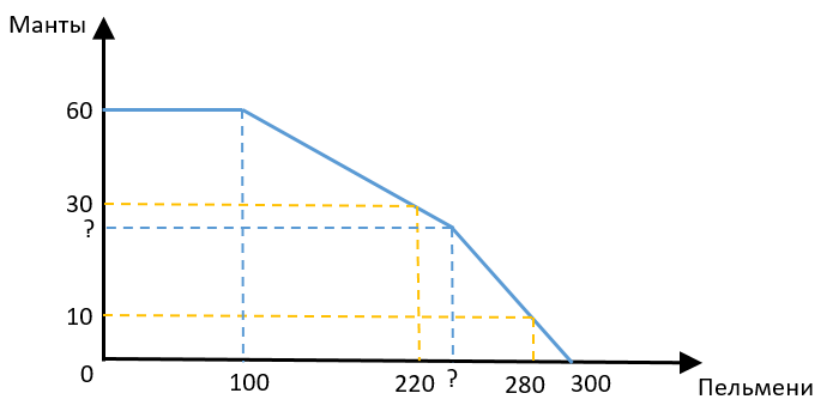
Решение:

А) КПВ семьи из трех человек состоит из трех линейных функций, на графике будет 2 крайних точки и 2 точки перегиба. Известно, что Папа не умеет лепить манты, а, следовательно, будет заниматься лепкой только пельменей. При этом максимальное количество мант, которое производит семья составит 60 шт., что является крайней точкой на КПВ по оси у.

Первый участок КПВ принадлежит Папе, это будет отрезок, параллельный оси х с первой точкой перегиба, соответствующей максимальному количеству пельменей, которые может слепить Папа (100 пельменей).

Определим вторую крайнюю точку. Известно, что если семья будет лепить 280 пельменей, то 10 мант будет лепить Дочка, у которой $AC \ 1M = 2П$, следовательно, отказавшись от производства 10 мант, она сможет слепить еще $10 \cdot 2 = 20$ пельменей, тогда максимальное число пельменей составит $280 + 20 = 300$ шт., что является второй крайней точкой на КПВ.

Отметим известные нам данные. **(3 балла за рассуждения, определение крайних точек КПВ и первой точки перегиба)**



Найдем вторую точку перегиба общей КПВ. Для этого определим уравнения КПВ Мамы (2 отрезок общей КПВ) и Дочки (3 отрезок общей КПВ).

По известным точкам участка КПВ Мамы (100; 60) и (220; 30), составим и решим систему:

$$\begin{cases} 60 = 100a + b \\ 30 = 220a + b \end{cases}$$

Тогда уравнение КПВ Мамы имеет вид: $M = 85 - 0,25П$. **(3 балла)**

По известным точкам участка КПВ Дочки (280; 10) и (300; 0), составим и решим систему:

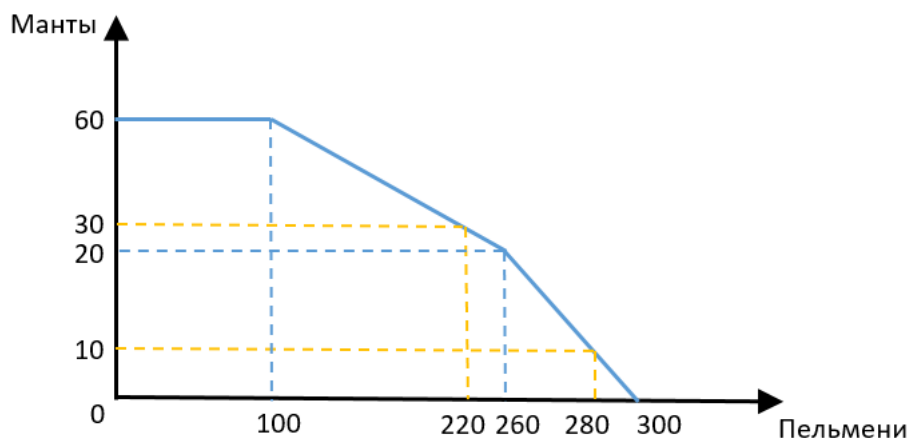
$$\begin{cases} 10 = 280a + b \\ 0 = 300a + b \end{cases}$$

Тогда уравнение КПВ Дочки имеет вид: $M = 150 - 0,5\Pi$. (3 балла)

Вторую точку перегиба найдем, приравняв записанные уравнения.

$$85 - 0,25\Pi = 150 - 0,5\Pi$$

$\Pi = 260$; $M = 20$. Отметим недостающие данные на графике КПВ. (3 балла)



Б) Составим уравнения и найдем количество приготовленных мант.

Пусть x - съедает Папа, а y - съедает мама, тогда

$$\begin{cases} X + Y = 12 \\ X - Y = 2 \end{cases}$$

$$X = 7, Y = 5.$$

По условию дочка съедает $5 - 3 = 2$ шт.

Соответственно необходимо сварить $7 + 5 + 2 = 14$ мант.

(4 балла за составление и решение системы, нахождение общего количества приготовленных мант).

Данное количество, принадлежит участку КПВ дочери, соответственно именно она слепит 14 мант, а затем присоединится к родителям в лепке пельменей и сможет слепить $(20 - 14) * 2 = 12$ пельменей. (2 балла)

Тогда общее количество пельменей, которое заморозит семья составит $260 + 12 = 272$ шт. (2 балла)

Ответ: А) Определение крайних точек, точек перегиба, построение КПВ.

Б) 272 шт.

Задача 4 (20 баллов) «Николай начинает бизнес»

Резчик по дереву и бересте Николай хочет арендовать рабочее место в мастерской по изготовлению предметов народного промысла. В мастерской «Дубрава» стоимость аренды места с инструментом составляет 26 000 рублей в месяц, плюс 10% от выручки. На расходные материалы Николай в среднем тратит 500 рублей на одно изделие. А средняя стоимость одного изделия составляет 2000 рублей.

А) При каком минимальном количестве изделий в месяц Николай сможет заработать (выручка превысит расходы)? (12 баллов)

Б) Напишите функции и постройте графики постоянных, переменных, совокупных расходов, выручки. Определите точку безубыточности. (8 баллов)

Решение:

А) **1 вариант.** Пусть x - количество изделий, при котором доходы Николая равны расходам.

Тогда доходы Николая составят $2000x$ рублей, а расходы $26000 + 2000x \cdot 10\% + 500x$.

Приравняем доходы расходам: $2000x = 26000 + 200x + 500x$.

Отсюда $1300x = 26000$, $x = 20$ изделий. **(10 баллов)**

2 вариант. Объем безубыточного производства можно также рассчитать по формуле: $TБ = \text{Постоянные расходы} / (\text{Цена} - \text{Переменные затраты на единицу})$

Переменные затраты на единицу изделия = $500 + 2000x \cdot 10\% = 700$ рублей.

$TБ = 26000 / (2000 - 700) = 20$ изделий.

Николай должен продать больше 20 изделий в месяц, чтобы получить прибыль. Наименьшее целое число изделий - 21 изделие. **(2 балла)**

Б) Для построения графиков постоянных, переменных, совокупных расходов и выручки запишем соответствующие функции:

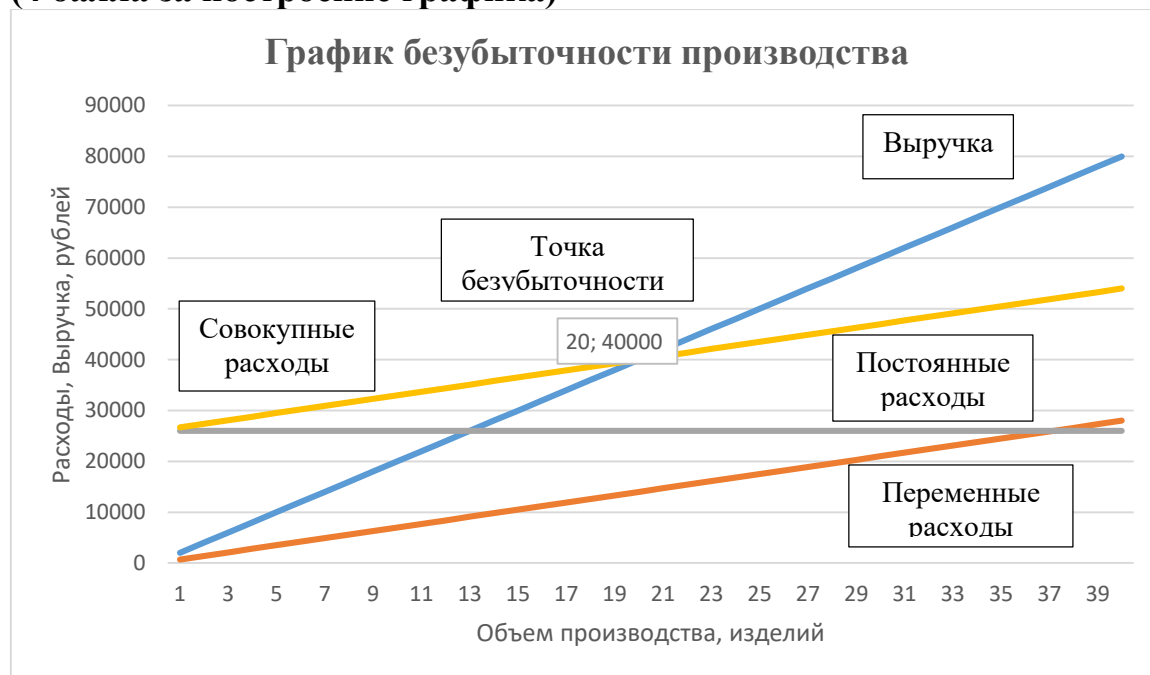
- функция постоянных расходов: $FC = 26000$ **(1 балл)**

- функция переменных расходов: $VC = 700Q$ **(1 балл)**

- функция совокупных расходов: $TC = 26000 + 700Q$ **(1 балл)**

- функция выручки: $TR = 2000Q$ **(1 балл)**

(4 балла за построение графика)



Ответ: А) 21 изделие; Б) Определение функций, построение графика.

Задача 5. «Инвестиционные решения Бабы Яги»

Баба Яга, проживающая в Дремучем лесу Тридевятого царства, по совету Кощея Бессмертного, решила улучшить свое материальное положение. Накопив часть пенсии, она внесла свои сбережения в банк «Лукоморье» под определенный процент годовых. Через некоторое время подруга Кикимора рассказала, что в соседнем Волшебном лесу, есть банк «Чудесный», в котором процент годовых для пенсионеров в 5 раз выше, чем в «Лукоморье»! После долгих размышлений и ровно через год после открытия счета в банке «Лукоморье», Баба Яга сняла треть своих накоплений и открыла счет в банке «Чудесный». В результате через год сумма на

счете в банке «Чудесный» превысила первоначальные кровные сбережения Бабы Яги на 75%.

А) Определите процент годовых в банке «Лукоморье» и в банке «Чудесный». **(15 баллов)**

Б) На сколько процентов выросла сумма первоначальных сбережений Бабы Яги за два года с учетом хранения денег на двух счетах? **(5 баллов)**

Решение:

А) Пусть Баба Яга внесла в банк «Лукоморье» X ден. ед. под $x\%$ годовых.

Тогда за год хранения вклада внесенная сумма выросла до $X(1 + 0,01x)$ ден. ед. **(1 балл)**

Баба Яга сняла треть своих накоплений, т.е. $X(1 + 0,01x)/3$ ден. ед. и поместила эту сумму в банк «Чудесный». **(2 балла)**

За год хранения денег в банке «Чудесный» сумма выросла до $X(1+0,01x)(1+0,05x)/3$ ден. ед. А эта сумма по условию задачи составляет $1,75X$ ден. ед.

Решим уравнение: $X(1+0,01x)(1+0,05x)/3 = 1,75X$

$$(1+0,01x)(1+0,05x) = 5,25$$

$$0,0005x^2 + 0,06x - 4,25 = 0$$

$$5x^2 + 600x - 42500 = 0$$

$$x^2 + 120x - 8500 = 0$$

$$D = 114400 - 4(-8500) = 48400$$

$$x_1 = (-120 + 220)/2 = 50$$

$$x_2 = (-120 - 220)/2 = -170$$

По условию задачи подходит положительный корень $x = 50$. Значит в банке «Лукоморье» процент годовых равен 50%. **(10 баллов за составление и решение уравнения)**

В банке «Чудесный» процентная ставка в 5 раз выше, т.е. 250% годовых. **(2 балла)**

Б) На счете в банке «Чудесный» через 1 год хранения денег сумма составила $X(1 + 0,01 \cdot 50) = 1,5X$ ден. ед.

После снятия трети накоплений осталось X ден. ед.

Еще через год хранения денег сумма составила $X(1 + 0,01 \cdot 50) = 1,5X$ ден. ед. **(3 балла)**

Всего накопления Бабы Яги составили $1,5X + 1,75X = 3,25X$, т.е. увеличились в 3,25 раза, или на 225 процентов. **(2 балла)**

Ответ: А) 50% и 250%; Б) увеличилась на 225%.

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП. ЗАДАЧИ. РЕШЕБНИК.

11 класс.

Время выполнения 180 минут.

Всего за задачи 100 баллов

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Решение каждой задачи должно быть выполнено максимально подробно, поскольку итоговая оценка учитывает то, какой процент приведенного решения является верным. Верным должно признаваться любое корректное решение приведенной задачи, независимо от того, насколько оно совпадает с авторским. Более подробные и полные решения оцениваются большим количеством баллов. Если жюри приходит к выводу, что задача скорее решена, чем не решена, то оценка должна быть больше половины от максимально возможной, в противном случае — меньше. Рекомендуется присваивать баллы за каждый шаг в решении задачи.

Арифметические ошибки не должны приводить к существенному сокращению баллов, поскольку на олимпиаде, в первую очередь, проверяется не умение хорошо считать, а умение нестандартно мыслить. При наличии ошибки нужно найти ее и снизить балл исходя из степени ее существенности.

Задача 1(20 баллов) «Ужин на Старый Новый год»

На Старый Новый год семья Петровых из трех человек, традиционно все вместе лепят пельмени и манты. Если семья слепит 30 мант, то получится слепить 220 пельменей, причем 100 из них слепит Папа, который не умеет лепить манты вовсе, а остальные пельмени слепит Мама. Если же семья слепит 280 пельменей, то получится слепить всего 10 мант, которые будут слеплены Дочкой (две приведённые точки находятся на разных участках КПВ семьи). Максимальное количество мант, которое может слепить семья составляет 60 шт., при этом Дочка только учится семейной традиции поэтому работает неторопливо и аккуратно, а альтернативная стоимость одного манта для нее составляет 2 пельменя.

А) Постройте общую КПВ семьи Петровых (манты по оси y). (12 баллов)

Б) Традиционное горячее блюдо в этот вечер манты, остальные полуфабрикаты семья замораживает впрок. Папа вместе с Мамой съедают 12 мант, при этом Мама съедает на 2 манта меньше Папы, а Дочка на 3 манта меньше Мама. Какое максимальное количество пельменей сможет заморозить семья, после приготовления ужина на Старый Новый год? (8 баллов)

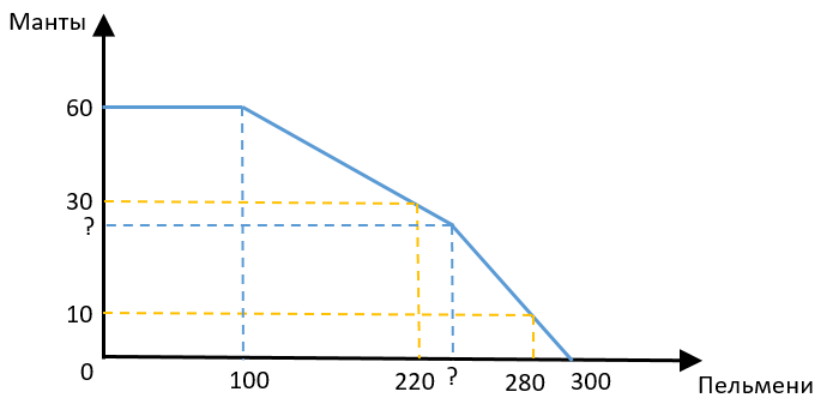
Решение:

А) КПВ семьи из трех человек состоит из трех линейных функций, на графике будет 2 крайних точки и 2 точки перегиба. Известно, что Папа не умеет лепить манты, а, следовательно, будет заниматься лепкой только пельменей. При этом максимальное количество мант, которое производит семья составит 60 шт., что является крайней точкой на КПВ по оси y .

Первый участок КПВ принадлежит Папе, это будет отрезок, параллельный оси x с первой точкой перегиба, соответствующей максимальному количеству пельменей, которые может слепить Папа (100 пельменей).

Определим вторую крайнюю точку. Известно, что если семья будет лепить 280 пельменей, то 10 мант будет лепить Дочка, у которой $AC \ 1M=2П$, следовательно, отказавшись от производства 10 мант, она сможет слепить еще $10 \cdot 2=20$ пельменей, тогда максимальное число пельменей составит $280+20=300$ шт., что является второй крайней точкой на КПВ.

Отметим известные нам данные. (3 балла за рассуждения, определение крайних точек КПВ и первой точки перегиба)



Найдем вторую точку перегиба общей КПВ. Для этого определим уравнения КПВ Мамы (2 отрезок общей КПВ) и Дочки (3 отрезок общей КПВ).

По известным точкам участка КПВ Мамы (100; 60) и (220; 30), составим и решим систему:

$$\begin{cases} 60 = 100a + b \\ 30 = 220a + b \end{cases}$$

Тогда уравнение КПВ Мамы имеет вид: $M = 85 - 0,25П$. (3 балла)

По известным точкам участка КПВ Дочки (280; 10) и (300; 0), составим и решим систему:

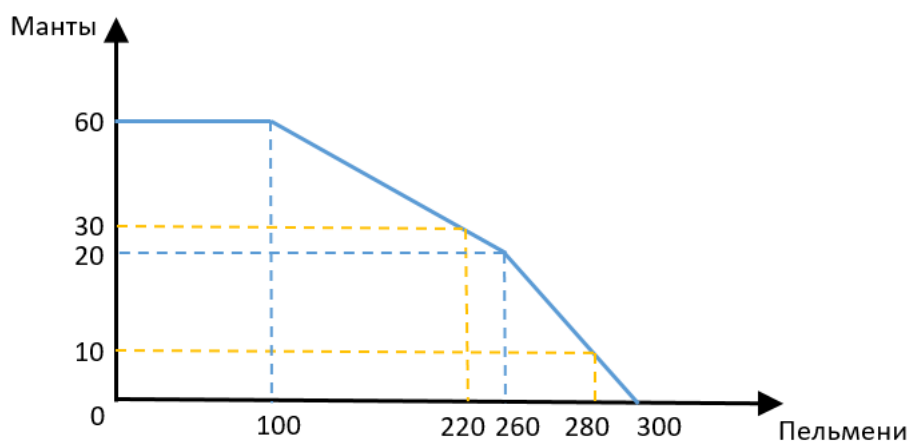
$$\begin{cases} 10 = 280a + b \\ 0 = 300a + b \end{cases}$$

Тогда уравнение КПВ Дочки имеет вид: $M = 150 - 0,5П$. (3 балла)

Вторую точку перегиба найдем, приравняв записанные уравнения.

$$85 - 0,25П = 150 - 0,5П$$

$П = 260$; $M = 20$. Отметим недостающие данные на графике КПВ. (3 балла)



Б) Составим уравнения и найдем количество приготовленных мант.

Пусть x - съедает Папа, а y – съедает мама, тогда

$$\begin{cases} X + Y = 12 \\ X - Y = 2 \end{cases}$$

$X=7$, $Y=5$.

По условию дочка съедает $5 - 3=2$ шт.

Соответственно необходимо сварить $7 + 5 + 2 = 14$ мант.

(4 балла за составление и решение системы, нахождение общего количества приготовленных мант).

Данное количество, принадлежит участку КПВ дочери, соответственно именно она слепит 14 мант, а затем присоединится к родителям в лепке пельменей и сможет слепить $(20-14)*2=12$ пельменей. **(2 балла)**

Тогда общее количество пельменей, которое заморозит семья составит $260+12=272$ шт. **(2 балла)**

Ответ: А) Определение крайних точек, точек перегиба, построение КПВ.

Б) 272 шт.

Задача 2(20 баллов) «Инвестиционные решения Бабы Яги»

Баба Яга, проживающая в Дремучем лесу Тридевятого царства, по совету Кощея Бессмертного, решила улучшить свое материальное положение. Накопив часть пенсии, она внесла свои сбережения в банк «Лукоморье» под определенный процент годовых. Через некоторое время подруга Кикимора рассказала, что в соседнем Волшебном лесу, есть банк «Чудесный», в котором процент годовых для пенсионеров в 5 раз выше, чем в «Лукоморье»! После долгих размышлений и ровно через год после открытия счета в банке «Лукоморье», Баба Яга сняла треть своих накоплений и открыла счет в банке «Чудесный». В результате через год сумма на счете в банке «Чудесный» превысила первоначальные кровные сбережения Бабы Яги на 75%.

А) Определите процент годовых в банке «Лукоморье» и в банке «Чудесный». **(15 баллов)**

Б) На сколько процентов выросла сумма первоначальных сбережений Бабы Яги за два года с учетом хранения денег на двух счетах? **(5 баллов)**

Решение:

А) Пусть Баба Яга внесла в банк «Лукоморье» X ден. ед. под $x\%$ годовых.

Тогда за год хранения вклада внесенная сумма выросла до $X(1 + 0,01x)$ ден. ед. **(1 балл)**

Баба Яга сняла треть своих накоплений, т.е. $X(1 + 0,01x)/3$ ден. ед. и поместила эту сумму в банк «Чудесный». **(2 балла)**

За год хранения денег в банке «Чудесный» сумма выросла до $X(1+0,01x)(1+0,05x)/3$ ден. ед. А эта сумма по условию задачи составляет $1,75X$ ден. ед.

Решим уравнение: $X(1+0,01x)(1+0,05x)/3 = 1,75X$

$$(1+0,01x)(1+0,05x) = 5,25$$

$$0,0005x^2 + 0,06x - 4,25 = 0$$

$$5x^2 + 600x - 42500 = 0$$

$$x^2 + 120x - 8500 = 0$$

$$D = 114400 - 4(-8500) = 48400$$

$$x_1 = (-120 + 220)/2 = 50$$

$$x_2 = (-120 - 220)/2 = -170$$

По условию задачи подходит положительный корень $x = 50$. Значит в банке «Лукоморье» процент годовых равен 50%. **(10 баллов за составление и решение уравнения)**

В банке «Чудесный» процентная ставка в 5 раз выше, т.е. 250% годовых. **(2 балла)**

Б) На счете в банке «Чудесный» через 1 год хранения денег сумма составила $X(1 + 0,01*50) = 1,5X$ ден. ед.

После снятия трети накоплений осталось X ден. ед.

Еще через год хранения денег сумма составила $X(1 + 0,01*50) = 1,5X$ ден. ед.

(3 балла)

Всего накопления Бабы Яги составили $1,5X + 1,75X = 3,25X$, т.е. увеличились в 3,25 раза, или на 225 процентов. **(2 балла)**

Ответ: А) 50% и 250%; Б) увеличилась на 225%.

Задача 3 (20 баллов) «Круассаны с начинкой»

Оксана, окончив кулинарный техникум и изучив спрос на кондитерские изделия в своем городе, решила открыть небольшое производство круассанов с шоколадной и ягодной начинкой, чтобы поставлять их в кофейни города. Она провела необходимые расчеты по каждому виду продукта и внесла данные в таблицу, представленную ниже.

Вид начинки	Себестоимость 1 кг, рублей	Отпускная цена 1 кг, рублей	Производственные возможности в месяц, кг
Ягодная	700	1000	900
Шоколадная	1000	1350	750

Кофейни готовы покупать любое количество круассанов, но для разнообразия ассортимента каждого вида круассанов должно быть представлено к продаже не менее 150 кг.

Определите оптимальный объем производства каждого вида круассанов и максимально возможную прибыль, которую может получить начинающий предприниматель Оксана.

Решение:

Пусть x - доля мощностей, занятых на производство круассанов с ягодной начинкой, а y - доля мощностей, занятых под производство круассанов с шоколадной начинкой. Тогда $x + y = 1$, при этом круассанов с ягодной начинкой производится $900x$ кг, а с шоколадной начинкой - $750y$ кг.

Из условия ассортимента следует, что $900x \geq 150$, откуда $x \geq 1/6$, а $750y \geq 150$ откуда $y \geq 1/5$.

Прибыль с продажи 1 кг круассанов с ягодной начинкой равна $1000 - 700 = 300$ рублей, а прибыль с продажи 1 кг круассанов с шоколадной начинкой равна $1350 - 1000 = 350$ рублей.

Общая прибыль с произведенной за месяц продукции составит $S(x,y) = 300*900x + 350*750y = 270000x + 262500y = 750*(360x+350y)$

Таким образом, нам необходимо найти наибольшее значение функции $S(x,y)=750*(360x+350y)$ при выполнении следующих условий

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x \geq \frac{1}{6}, y \geq \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x, \\ \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Подставляя $y = 1 - x$ в выражение $360x + 350y$, получаем: $y = 360x + 350(1 - x) = 10x + 350$, функция возрастающая.

Наибольшее значение выражения $S(x,y) = 750*(10x+350)$ при условии $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}$ достигается при $x = \frac{4}{5}$, тогда $y = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$. **(16 баллов за составление функции прибыли, ее ограничений и обоснование ответа)**

При этом Оксана производит 720 кг круассанов с ягодной начинкой ($900 \cdot \frac{4}{5}$) и 150 кг круассанов с шоколадной начинкой ($750 \cdot \frac{1}{5}$). **(2 балла)**

Максимально возможная прибыль Оксаны за месяц равна: $750 \cdot (360 \cdot \frac{4}{5} + 350 \cdot \frac{1}{5}) = 268500$ рублей. **(2 балла)**

Второй вариант решения

Прибыль с продажи 1 кг круассанов с ягодной начинкой равна $1000 - 700 = 300$ рублей, а прибыль с продажи 1 кг круассанов с шоколадной начинкой равна $1350 - 1000 = 350$ рублей. **(4 балла)**

При этом $900/750 = 1,2$. Это означает, что альтернативная стоимость 1 кг круассанов с шоколадной начинкой равна 1,2 кг круассанов с ягодной начинкой. **(4 балла)**

Заметим, что $1 \cdot 350$ рублей $< 1,2 \cdot 300$ рублей; $350 < 360$. Поэтому более выгодно производить круассаны с ягодной начинкой. Значит, круассанов с шоколадной начинкой необходимо производить 150 кг, а круассанов с ягодной начинкой $900 - 150 \cdot 1,2 = 720$ кг. **(8 баллов)**

Тогда максимально возможная прибыль за месяц: $150 \cdot 350 + 720 \cdot 300 = 268500$ рублей. **(4 балла)**

Ответ: 150 кг – с шоколадной начинкой, 720 кг – с ягодной начинкой; 268500 рублей.

Задача 4 (20 баллов) «Выгодный бизнес»

В городе Бердске водитель Васнецов И.С. арендует легковой автомобиль - такси у автопарка и возит пассажиров по маршруту «Бердск – аэропорт Толмачёво», туда и обратно. Расходы на поездку в одну сторону (стоимость бензина) составляют 250 рублей. Кроме того, Васнецов И.С. платит автопарку арендную плату – 1000 рублей за рабочую смену (независимо от количества поездок). По условию договора аренды автомобиля, водители всегда начинают и заканчивают смену в городе.

Данные рынка показывают, что спрос на поездки линейно зависит от цены. В таблице приведены некоторые значения этой зависимости.

Цена поездки, рублей	Количество поездок за смену (в одну сторону)
500	12
1000	8
1500	4

Какую цену поездки следует установить Васнецову И.С., чтобы его заработок был максимальным (с учётом оплаты бензина и арендной платы)? Каким при этом будет количество поездок за смену?

Решение:

Найдём зависимость числа поездок от цены поездки на основе данных, представленных в таблице.

Определим линейную функцию спроса $y(x) = kx + b$, где x – установленная цена поездки, а $y(x)$ – число поездок с пассажиром. На основе двух точек (данные из таблицы) составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 500k + b = 12 \\ 1000k + b = 8 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим: $k = -0,008$, $b = 16$

Таким образом, функция спроса, зависимость числа поездок от цены имеет вид:

$$Qd = -0,008P + 16 \quad (5 \text{ баллов})$$

Определим обратную функцию спроса: $P = 2000 - Qd/0,008$

Запишем функцию выручки (дохода), как произведение количества поездок на цену поездки: $TR = (2000 - Q/0,008)Q = 2000Q - Q^2/0,008$

Определим функцию общих затрат, которые складываются из произведения количества поездок на стоимость бензина на одну поездку и арендной платы автопарку: $TC = 250Q + 1000$

Определим функцию прибыли, как разницу между доходом и затратами:

$$Pr = TR - TC = 2000Q - Q^2/0,008 - 250Q - 1000 = -Q^2/0,008 + 1750Q - 1000 \quad (5 \text{ баллов})$$

Водитель Васнецов И.С. получит максимальную прибыль, когда предельная прибыль будет равна нулю.

$$MPr = (Pr)' = (-Q^2/0,008 + 1750Q - 1000)' = -250Q + 1750$$
$$-250Q + 1750 = 0; Q = 7 \text{ поездок.}$$

Определим цену поездки, при которой прибыль достигнет максимума:

$$P = 2000 - 7/0,008 = 1125 \text{ рублей.}$$

Максимум прибыли составит: $-7^2/0,008 + 1750*7 - 1000 = 5125$ рублей. (5 баллов)

Мы получили максимальную прибыль, при этом число поездок (7) не четное, что не отвечает условию договора аренды автомобиля.

Какая будет прибыль, если выбрать четное количество поездок, близких к 7, а именно 6 и 8?

Pr (при $Q = 6$) = $-6^2/0,008 + 1750*6 - 1000 = 5000$ рублей, при $P = 2000 - 6/0,008 = 1250$ рублей.

Pr (при $Q = 8$) = $-8^2/0,008 + 1750*8 - 1000 = 5000$ рублей, при $P = 2000 - 8/0,008 = 1000$ рублей.

Как видим, при количестве поездок 6 и 8, прибыль, которую получит Васнецов И.С. одинаковая, 5000 рублей. При этом ему нет необходимости совершать дополнительно 7-ую и 8-ую поездки, которые не принесут дополнительной выгоды. Лучше это время освободить на другие дела, отдых.

Поэтому оптимально для Васнецова И.С. установить цену на одну поездку 1250 рублей и осуществить 6 поездок за смену. (5 баллов)

Ответ: цена 1250 рублей, среднее число поездок с пассажирами 6.

Задача 5(20 баллов) «Проблемы занятости в стране Чудесная»

В экономике страны Чудесная в среднем каждый двадцатый гражданин является безработным, а каждый шестой – не учитывается в составе рабочей силы. Реальный ВВП в текущем году произведен в объеме 1800 млрд. ден. ед.

А) Определите циклический уровень безработицы в стране Чудесная, если ее естественный уровень составляет 2%. (15 баллов)

Б) Определите величину потенциального ВВП в стране Чудесная, если коэффициент Оукена составляет 2,5. (5 баллов)

Решение:

А) Фактический уровень безработицы включает три составляющие: уровни фрикционной, структурной и циклической безработицы ($u_{\text{факт.}} = u_{\text{фрикц.}} + u_{\text{структ.}} + u_{\text{цикл.}}$).

Естественный уровень безработицы определяется как сумма уровней фрикционной и структурной безработицы ($u_{\text{ест.}} = u_{\text{фрикц.}} + u_{\text{структ.}}$).

Тогда циклический уровень безработицы: $u_{\text{цикл.}} = u_{\text{факт.}} - u_{\text{ест.}}$

Уровень безработицы = Безработные/Рабочая сила

Безработные = $1/20 = 0,05$ или 5% (3 балла)

Не учитываются в составе рабочей силы = $1/6 = 0,1667$ или 16,67% (3 балла)

Рабочая сила = $1 - 0,1667 = 0,8333$ или 83,33% (3 балла)

Уровень безработицы = $0,05/0,8333 = 0,06$ или 6% (3 балла)

Таким образом, фактический уровень безработицы в стране Чудесная составляет 6%.

Циклический уровень безработицы в стране Чудесная = $6\% - 2\% = 4\%$. (3 балла)

Б) Согласно закону Оукена, страна теряет от 2 до 3 процентов фактического ВВП по отношению к потенциальному ВВП, когда фактический уровень безработицы увеличивается на 1 процент по сравнению с ее естественным уровнем.

$$(ВВП_{\text{факт.}} - ВВП_{\text{потенц.}})/ВВП_{\text{потенц.}} * 100 = -\beta(u_{\text{факт.}} - u_{\text{ест.}})$$

$$(1800 - ВВП_{\text{потенц.}})/ВВП_{\text{потенц.}} * 100 = 2,5*(6 - 2)$$

$$(1800 - ВВП_{\text{потенц.}})/ВВП_{\text{потенц.}} * 100 = -10$$

$$(1800 - ВВП_{\text{потенц.}})/ВВП_{\text{потенц.}} = -0,1$$

$$1800 - ВВП_{\text{потенц.}} = -0,1 * ВВП_{\text{потенц.}}$$

$$1800 = 0,9 * ВВП_{\text{потенц.}}$$

$$ВВП_{\text{потенц.}} = 2000 \text{ млрд. ден. ед. (5 баллов)}$$

Ответ: А) 4%; Б) 2000 млрд. ден. ед.

Заместитель министра образования Новосибирской области



Щужин Владимир Николаевич